

PGS.TS. ĐẶNG ĐỨC TRỌNG – NGUYỄN ĐỨC TẤN – VŨ MINH NGHĨA
VĂN HOÀNG NHẤT ANH – DƯƠNG VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐỨC HOÀ
NGUYỄN CAO HUYNH – NGUYỄN VŨ HUY – TẠ HOÀNG THÔNG
(Nhóm giáo viên Thăng Long)

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TỰ HỌC TOÁN 8

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

BDKT TOÁN - LÝ - HÓA CẤP 2+3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN

CÙNG VỚI SỰ CỘNG TÁC CỦA CÁC GIÁO VIÊN

1. Nguyễn Ngọc Huynh
2. Huỳnh Nguyễn Luân Lưu
3. Vũ Duy Quang
4. Nguyễn Tấn Thành
5. Vũ Thanh Thái
6. Vũ Văn Thiện
7. Nguyễn Hoàng Thuận
8. Nguyễn Thanh Tuấn
9. Phạm Lê Quốc Thắng
10. Đặng Đức Tiến
11. Nguyễn Minh Sơn
12. Bùi Nam Phong
13. Bùi Thị Chi
14. Cao Thị Thu Vân
15. Nguyễn Trần Hồng Vân
16. Vũ Hữu Trí

LỜI NÓI ĐẦU

Quyển sách *Bồi dưỡng năng lực tự học Toán 8* thuộc bộ sách Bồi dưỡng năng lực tự học toán bậc Trung học Cơ sở nhằm đáp ứng yêu cầu, mong đợi của các thầy cô giáo dạy toán, các bậc phụ huynh cùng các em học sinh về tư liệu toán dùng cho tự học, tự rèn luyện.

Sách được biên soạn theo nội dung chương trình hiện hành. Các bài tập toán được sắp xếp từ dễ và nâng dần từ dễ đến khó (và rất khó) chắc chắn sẽ giúp các em học sinh tự rèn luyện, phát triển tư duy độc lập và sử dụng óc thông minh sáng tạo của bản thân.

Chúng tôi đã hết sức cố gắng trong quá trình biên soạn nhưng vì đây là thành quả bước đầu của một hướng soạn sách mới nên chắc chắn quyển sách vẫn còn những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý của quý bạn đọc để quyển sách được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN A – ĐẠI SỐ**Bài 1. ĐƠN THỨC – ĐA THỨC – HẸNG ĐẲNG THỨC****RÈN KĨ NĂNG TÍNH TOÁN****Bài 1:** Tính. (Rút gọn nếu có thể)

1) $-4x^5(x^3 - 4x^2 + 7x - 3)$

2) $3x^4(-2x^3 + 5x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3})$

3) $-5x^2y^4(3x^2y^3 - 2x^3y^2 - xy)$

4) $4x^3y^2(-2x^2y + 4x^4 - 3y^2)$

5) $\frac{1}{2}x^3y(2x^4y^3 - 4xy - 6)$

6) $\frac{1}{2}x^3y(2x^4y^3 - 4xy - 6)$

7) $-3x^5y^7(\frac{2}{3}x^4y - y^3 + \frac{1}{2})$

8) $\frac{3}{5}x^2y(-\frac{5}{3}xy - 10x + 5y)$

9) $-\frac{5}{6}x(\frac{2}{3}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{1}{2}xy)$

10) $x^4y^5(\frac{7}{3}x^2y^4 - \frac{1}{7}x^3y - \frac{5}{14})$

11) $5x^2 - 3x(x + 2)$

12) $-4x^2 + 2x - 4x(x - 5)$

13) $3x^3 - x^2 - x(2x^2 - x + 3)$

14) $x^3 - 5x^2 + 2x(-x^2 + 3x - 5)$

15) $-7x^4 + 5x^3 - x^2(-2x^2 + 3x - 1)$

16) $3x^4 - 4x^3 + 2x(x^3 - 2x^2 + 7x)$

17) $3x(x - 5) - 5x(x + 7)$

18) $-4x(3x - 4) + 7x(x - 5)$

19) $4x(x^2 - x + 1) - x(3x^2 - 2x - 5)$

20) $-x^2(x^2 - 4x + 3) + x(x^2 - x^2 + x - 3)$

Bài 2: Tìm x, biết

1) $5x(\frac{1}{5}x - 2) + 3(6 - \frac{1}{3}x^2) = 12$

2) $3x(\frac{4}{3}x + 1) - 4x(x - 2) = 10$

3) $5(x^2 - 3x + 1) + x(1 - 5x) = x - 2$

4) $12x^2 - 4x(3x - 5) = 10x - 17$

5) $4x(x - 5) - 7x(x - 4) + 3x^2 = 12$

6) $4x^2 - 2x + 3 - 4x(x - 5) = 7x - 3$

7) $-3x(x - 5) + 5(x - 1) + 3x^2 = 4 - x$

8) $7x(x - 2) - 5(x - 1) = 21x^2 - 14x^2 + 3$

9) $3(5x - 1) - x(x - 2) + x^2 - 13x = 7$

10) $\frac{1}{5}x(10x - 15) - 2x(x - 5) = 12$

Bài 3: Tính giá trị biểu thức

1) $A = 7x(x - 5) + 3(x - 2)$ tại $x = 0$

2) $B = 5 - 4x(x - 2) + 4x^2$ tại $x = 4$

3) $C = 4x^2 - 2x + 3x(x - 5)$ tại $x = -1$

4) $D = -3x^2 + 4x - 5(x - 2)$ tại $x = 1$

5) $E = 4x(2x - 3) - 5x(x - 2)$ tại $x = 2$

Bài 4: Chứng minh giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

1) $A = -3x(x - 5) + 3(x^2 - 4x) - 3x + 10$

2) $B = 4x(x^2 - 7x + 2) - 4(x^3 - 7x^2 + 2x - 5)$

3) $C = 5x(x^2 - x) - x^2(5x - 5) - 15$

4) $D = 7(x^2 - 5x + 3) - x(7x - 35) - 14$

5) $E = x^2 - 4x - x(x - 4) - 15$

Bài 5: Tính (rút gọn)

1) $(3x + 5)(2x - 7)$

3) $(x - 5)(4x - 3)$

5) $(x - 5)(-x^2 + x - 1)$

7) $(-x + 4)(-x^2 + 4x - 1)$

9) $(\frac{3}{2}x - 1)(-4x^2 + 2x - 6)$

11) $4x^2 - (x + 3)(x - 5) + x$

13) $x^2 - 2x + 5 - (x - 7)(x + 2)$

15) $x(x - 5) - 3x(x + 1)$

17) $-5x(x - 5) + (x - 3)(x^2 - 7)$

19) $4x(x^2 - x - 1) - (x^2 - 2)(x + 3)$

21) $x(x^2 - x - 2) - (x + 5)(x - 1)$

23) $(x - 1)(x + 2) - (x + 5)(x - 2)$

25) $(-x + 5)(x + 3) + (2x - 1)(x + 3)$

26) $(x + 3)(x - 1) - (x - 7)(x - 6)$

27) $(-x - 2)(x + 1) - (x - 5)(-x + 1)$

28) $5x(x - 3)(x - 1) - 4x(x^2 - 2x)$

29) $-4x(x + 3)(x - 4) - 3x(x^2 - x + 1)$

30) $-3(x + 4)(x - 7) + 7(x - 5)(x - 1)$

31) $4x(x^2 - x + 3) - (x - 6)(x - 5)$

2) $(-5x + 2)(-3x - 4)$

4) $(x^2 - 2x - 1)(x - 3)$

6) $(2x - 1)(x^2 - 5x + 3)$

8) $(\frac{1}{2}x + 3)(2x^2 - 4x - 6)$

10) $(-\frac{2}{3}x + 3)(3x^2 - 6x + 9)$

12) $5x - 3 + (x - 5)(x + 4) - 7$

14) $-3x + 7x - 9 + (x - 1)(x + 2)$

16) $4x(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 - x)$

18) $x(x^2 - 5x + 2) - (x + 3)(x^2 - 2)$

20) $(x - 5)(x + 7) - 7x(x + 3)$

22) $(x + 5)(x - 7) - (x - 4)(x + 3)$

24) $(2x - 3)(x + 4) + (-x + 1)(x - 2)$

Bài 6: Tìm x , biết

1) $4x(x - 5) - (x - 1)(4x - 3) = 5$

2) $(3x - 4)(x - 2) = 3x(x - 9) - 3$

3) $(x - 5)(x - 4) - (x + 1)(x - 2) = 7$

4) $5x(x - 3) = (x - 2)(5x - 1) - 5$

5) $(x - 5)(x - 1) = (x - 1)(x - 2)$

6) $6(x - 3)(x - 4) - 6x(x - 2) = 4$

7) $-(x + 3)(x - 4) + (x - 1)(x + 1) = 10$

8) $(2x - 1)(x - 2) - (x + 3)(2x - 7) = 3$

9) $(x - 5)(-x + 4) - (x - 1)(x + 3) = -2x^2$

10) $(4x + 1)(x - 3) - (x - 7)(4x - 1) = 15$

11) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - x(x^2 - 3) = 4$

12) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) + x(5 - x^2) = 6x$

13) $(5x - 1)(5x + 1) = 25x^2 - 7x + 15$

14) $8x(x - 3) - 8(x - 1)(x + 1) = 20$

15) $-4x^2(x - 7) + 4x(x^2 - 5) = 28x^2 - 13$

16) $(4x - 5)(x + 1) - 4(x - 1)(x + 1) = 7$

17) $(3x - 5)(x + 1) - (3x - 1)(x + 1) = x - 4$

18) $(x - 2)(x + 3) - (x + 4)(x - 7) = 5 - x$

19) $5(x - 3)(x - 7) - (5x + 1)(x - 2) = 8$

20) $3(x - 7)(x + 7) - (x - 1)(3x + 2) = 13$

Bài 7: Chứng minh rằng: giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x

1) $5x^2 - (2x + 1)(x - 2) - x(3x + 3) + 7$

2) $(3x - 1)(2x + 3) - (x - 5)(6x - 1) - 38x$

3) $(5x - 2)(x + 1) - (x - 3)(5x + 1) - 17(x - 2)$

4) $-3(x - 4)(x - 2) + x(3x - 18) - 25$

5) $(4x - 5)(x + 2) - (x + 5)(x - 3) - 3x^2 - x$

6) $(x - 3)(x + 7) - (2x - 1)(x + 2) + x(x - 1)$

7) $(7x - 3)(2x + 1) - (5x - 2)(x + 4) - 9x^2 + 17x$

8) $-2(x - 7)(x + 3) + (5x - 1)(x + 4) - 3x^2 - 27x$

9) $(6x - 5)(x + 8) - (3x - 1)(2x + 3) - 9(4x - 3)$

10) $(8x - 1)(x + 7) - (x - 2)(8x + 5) - 11(6x + 1)$

Bài 8: Chứng minh các đẳng thức sau

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

7) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Bài 9: Rút gọn và tính giá trị các biểu thức

1) $A = (5x - 7)(2x + 3) - (7x + 2)(x - 4)$ tại $x = \frac{1}{2}$

2) $B = (x - 9)(2x + 3) - 2(x + 7)(x - 5)$ tại $x = -\frac{1}{2}$

3) $C = (-5x + 4)(3x - 2) + (-2x + 3)(x - 2)$ tại $x = -2$

- 4) $D = (x-5)(-3x+1) - 3(x-2)(2x-1)$ tại $x = \frac{1}{3}$
 5) $E = (x-7)(x+8) - (x-5)(x-2)$ tại $x = -\frac{1}{5}$
 6) $F = -3(x-8)(2x+1) - (x+5)(-3x+2) - 4x(x-6)$ tại $x = -3$
 7) $G = (5x-4)(-2x+5) - 7x(x^2-4x+3) + (x^2-4x)(7x-2)$ tại $x = 1$
 8) $H = (-3x+5)(x-6) - (x-1)(x^2-2x+3) + (x+2)(x^2-3)$ tại $x = -1$
 9) $L = 5x(x-1)(2x+3) - 10x(x^2-4x+5) - (x-1)(x-4)$ tại $x = -\frac{1}{3}$
 10) $M = -7x(x-5) - (x-1)(x^2-x-2) + x^2(x-3) - 5x(x-8)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Bài 10: Rút gọn các biểu thức sau

- 1) $-5x(x-3)(2x+4) - (x+7)(x-3) + (5x-2)(3x+4)$
- 2) $(4x-1)(3x+1) - 5x^2(x-3) - (x-4)(x-3) - 7(x^3-2x^2+x-1)$
- 3) $4x(x^2-2x+3) - 3x(x+1)(x-2) + (-2x-5)(x-7) - 4x(x^2-x+1)$
- 4) $5x^2(x-7) - 4x(x-2)(x+3) - (x-5)(x+6) + (2x-1)(x+5)$
- 5) $(3x-7)(x+3) + 5x(x^2-2x-4) - x(4x-5)(x-4) - (x+2)(x+1)$
- 6) $-7x(2x^2-4x-5) - (x-5)(-2x+3) + (3x-2)(x+4) - 4x^2(x-3)$
- 7) $(x-6)(3x-1) - 2x^2(x-2) + x(x-1)(2x+3) - 5x(x^2-4x+1)$
- 8) $(8x-1)(2x-3) - (-x+7)(x-2) - 6x(x^2-x+3) + (x^2-3)(x-4)$
- 9) $(-3x+4)(x-2) - x(x^2-2)(-4x+1) + (2x-5)(x^2-4x)$
- 10) $(5x-2)(x+1) - 3x(x^2-x-3) - 2x(x-5)(x+4) + 5x(x^2-7)$
- 11) $-3x^2(x-4) + 2x(x-1)(-2x+3) - (x-9)(-2x+1) - 5(x-1)(x+2)$
- 12) $(-2x^2+5)(x-6) - 4x(x^2-7x+2) - 2x(x+3)(x-2) - (x^3-x^2)$
- 13) $(x^2-3x)(-5x^2+x) - x^3(x-7) + 5x^2(x-2)(x-4) - (x+1)(x+3)$
- 14) $(-x+4)(x-5) - 7x(x^2-5x+2) + (-5x+1)(x^2-5) + 30$
- 15) $3x(x-2)(x+2) - 2x(x-3)(x-7) + (x-1)(x^2-2x+2)$
- 16) $(x-3)(x^2-3x) - (4x-2)(-x^2+1) - 4x(x-7)(x+1) - (x^2-x-1)$
- 17) $-7x(x+2)(x-3) + 5x(-2x^2+x-4) + 3x(x^2-5x-7) - (x^2-5x)$

- 18) $10(x^2-x+1) - (x-5)(2x+1) + 5x(x-3) - (-7x^2+4x-5)$
- 19) $-5x(-2x^2+4x-10) + (4x^2-2x)(-3x+1) - (-9x^3+2x^2-x)$
- 20) $7x^2 - (-3x^2+4x-15) + (2x-1)(-3x-2) - (x-4)(x+5)$

Bài 11: Tìm x, biết

- 1) $(5x-7)(x-9) - (-x+3)(-5x+2) = 2x(x-4) - (x-1)(2x+3)$
- 2) $(x-3)(-2x+5) - 2x(x-4) + (4x-5)(x-3) = (x-2)(x-1) - (x^2-5x)$
- 3) $-2x(x^2+x-1) + (x-1)(2x^2-3) = 4x(-x+3) - (x^2-x+7) + x^2$
- 4) $3x(x^2+2x+7) - x(3x^2+6x-5) = (x+4)(x-5) - (x^2-10x+7)$
- 5) $(x-2)(3x-4) - 3x(x-5) = 5x(x-7) - 5(x-1)(x+5)$
- 6) $(5x-4)(x+5) - (x+1)(x^2-6) = (-x^2+4)(x-5) - x(x-4)$
- 7) $(-3x^2+x+2)(x-1) - x(x-7) = (-x^2+7)(3x-3) - (5x-19)$
- 8) $(4x^2-5x)(3x+2) + 7x(x+5) = (-4+x)(-2x+3) + 12x^3+2x^2$
- 9) $-5x^2(2x+5) + (5x-7)(5x+1) = (5x^2-4)(-2x+3) - 3x(5x-1)$
- 10) $(x-7)(2x^2-4) - 2x^2(x+7) = (5x+3)(2x-4) - 19x(2x-1)$
- 11) $(-4x^2-3)(2x+5) - (8x-3)(-x^2+2) = -5x(4x-6) - 3x^2-4$
- 12) $(x-7)(x+5) - (x-3)(x-2) = 15x^2(x+1) - (3x-1)(5x^2-2) - 20x^2$
- 13) $(3x-5)(5x-7) - 15x(x-2) = (6x-1)(3x+2) - (9x+1)(2x-1)$
- 14) $(9x^2-5)(x+3) - 3x^2(3x+9) = (x-5)(x+4) - x(x-11)$
- 15) $(x-3)(-x+10) + (x-8)(x+3) = (5x^2-1)(x+3) - 5x^3-15x^2$
- 16) $-7x^2(x+5) - (x^2-4)(-7x-5) = (15x-1)(-2x+1) - 7x+2$
- 17) $(6x-1)(x-3) - (2x-3)(3x+2) = (x+4)(x-6) - x(x+3)$
- 18) $(5x+4)(x-7) - 5x(x-5) = (x^2-7)(x+4) - x^2(x-3) - 7x^2$
- 19) $(12x^2-1)(x+3) - (4x^2-5)(3x+9) = (x-8)(x+2) - x^2-9$
- 20) $(-2x^2+5)(-x+3) - x^2(2x-6) = (x-1)(x+1) - (x-2)(x+4)$

Bài 12: Tính

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| 1) $(2x+3)^2$ | 2) $(3x+2y)^2$ | 3) $(x+3y)^2$ |
| 4) $(5x+1)^2$ | 5) $(4x+2y)^2$ | 6) $(5x+y)^2$ |
| 7) $(1+5y)^2$ | 8) $(a+b+c)^2$ | 9) $(x+y+z)^2$ |
| 10) $(3a-1)^2$ | 11) $(a-2)^2$ | 12) $(1-5a)^2$ |

- 13) $(3a - 2b)^2$ 14) $(4 - 3a)^2$ 15) $(5a - 4b)^2$
 16) $[(a + b) - c]^2$ 17) $(a - b + c)^2$ 18) $(a - b - c)^2$
 19) $(2x^2 + 3y^3)^2$ 20) $(2x^2y - 5xy^2)^2$ 21) $(a + 1)^3$
 22) $(a + 2)^3$ 23) $(x + 1)^3$ 24) $(x + 2)^3$
 25) $(x + 3)^3$ 26) $(x + 4)^3$ 27) $(2x + 3y)^3$
 28) $(3x + 1)^3$ 29) $(5x + 1)^3$ 30) $(4x + 2y)^3$
 31) $(a - 1)^3$ 32) $(a - 2)^3$ 33) $(x - 3)^3$
 34) $(x - 4)^3$ 35) $(x - 5)^3$ 36) $(2x - 3y)^3$
 37) $(x^2 - 2y)^3$ 38) $(2x^2 - 3y)^3$ 39) $(4 - 4y^2)^3$
 40) $(3x^2 - 2y^2)^3$ 41) $(5a - 3b)(5a + 3b)$ 42) $(3x + 1)(3x - 1)$
 43) $(5x^2 - 2)(5x^2 + 2)$ 44) $(2a + \frac{1}{2})(2a - \frac{1}{2})$ 45) $(3x^2 - y)(3x^2 + y)$
 46) $(\frac{1}{2}x - 1)(\frac{1}{2}x + 1)$ 47) $(\frac{3}{4}x + 2)(\frac{3}{4}x - 2)$ 48) $(5x - \frac{3}{2})(5x + \frac{3}{2})$
 49) $(2a^2 - 7)(2a^2 + 7)$ 50) $(x + y + z)(x + y - z)$
 51) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ 52) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
 53) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ 54) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$
 55) $(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$ 56) $(x - 6)(x^2 + 6x + 36)$
 57) $(x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4)$ 58) $(x^3 - 2)(x^6 + 2x^3 + 4)$
 59) $(\frac{1}{2} - x)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + x^2)$ 60) $(x - \frac{1}{3})(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9})$
 61) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ 62) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
 63) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$ 64) $(x + 5)(x^2 - 5x + 25)$
 65) $(x + \frac{1}{2})(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4})$ 66) $(x + \frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9})$
 67) $(x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$ 68) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$
 69) $(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$ 70) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9)$

Bài 13: Rút gọn

- 1) $-3x(x + 2)^2 + (x + 3)(x - 1)(x + 1) - (2x - 3)^2$
 2) $(x - 3)(x + 3)(x + 2) - (x - 1)(x^2 - 3) - 5x(x + 4)^2 - (x - 5)^2$
 3) $2x(x - 4)^2 - (x + 5)(x - 2)(x + 2) + 2(x + 5)^2 - (x - 1)^2$
 4) $(x + 5)^2 - 4x(2x + 3)^2 - (2x - 1)(x + 3)(x - 3)$
 5) $-2x(3x + 2)(3x - 2) + 5(x + 2)^2 - (x - 1)(2x - 1)(2x + 1)$
 6) $(7x - 8)(7x + 8) - 10(2x + 3)^2 + 5x(3x - 2)^2 - 4x(x - 5)^2$
 7) $(x^2 - 3)(x^2 + 3) - 5x^2(x + 1)^2 - (x^2 - 3x)(x^2 - 2x) + 4x(x + 2)^2$

- 8) $-6x^2(x + 5)^2 - (x - 3)^2 + (x^2 - 2)(2x^2 + 1) - 4x^2(3x - 4)^2$
 9) $(5x - 3y)^2 - (4x + y)(4x - y) - (3x + 5y)^2 + (x - 3y)(x + y)$
 10) $(-4x + 2y)(-4x - 2y) + (x - 5y)^2 - (3x + 2y)^2 - 7x(x - 3y)$
 11) $3x(x - 5)^2 - (x + 2)^3 + 2(x - 1)^3 - (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$
 12) $-5x(x - 3)(x + 3) + (x + 1)^3 - (x - 2)^3 + (x - 1)(x^2 + x + 1)$
 13) $(x - 4)^3 - 2x(x - 5)^2 + (x - 4)(x^2 + 4x + 16) - (x - 3)^3$
 14) $(x + 5)(x^2 - 5x + 25) - (x + 3)^3 + (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 1)^3$
 15) $(x - 7)(x^2 + x) - (x + 2)^3 - (x - 7)(x^2 + 7x + 49) + (x + 1)^3$
 16) $(x - 5)^3 - (x - 2)(x + 1)^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - (x + 2)^3$
 17) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) - (2x - 1)^3 + (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$
 18) $(2x + 1)^3 - (5x + 2)(25x^2 - 10x + 4) + (x - 5)^3 - (5 + 3x)^3$
 19) $(3x - 2y)^3 - (4x - 5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2) + (y + 2x)^3$
 20) $(x + 3y)^3 + (3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2) - (2y - 3x)^3$
 21) $(5x - y)(25x^2 + 5xy + y^2) - (x - 2y)^3 - 3(2x + y)^3$
 22) $-4(x + 3y)^3 + (x - 3y)(x + y)(x - y) - (2x - y)^3$
 23) $(3x + y)^3 - (5x - y)(25x^2 + 5xy + y^2) + (x + 2y)^3$

Bài 14: Tìm x, biết

- 1) $(x - 5)(x + 5) - (x + 3)^2 + 3(x - 2)^2 = (x + 1)^2 - (x + 4)(x - 4) + 3x^2$
 2) $(2x + 3)^2 + (x - 1)(x + 1) = 5(x + 2)^2 - (x - 5)(x + 1) + (x + 4)^2$
 3) $(-x + 5)(x - 2) + (x - 7)(x + 7) = (3x + 1)^2 - (3x - 2)(3x + 2)$
 4) $(5x - 1)(x + 1) - 2(x - 3)^2 = (x + 2)(3x - 1) - (x + 4)^2 + (x^2 - x)$
 5) $(4x - 1)^2 - (3x + 2)(3x - 2) = (7x - 1)(x + 2) + (2x + 1)^2 - (4x^2 + 7)$
 6) $(2x + 3)^2 - (5x - 4)(5x + 4) = (x + 5)^2 - (3x - 1)(7x + 2) - (x^2 - 1 + 1)$
 7) $(1 - 3x)^2 - (x - 2)(9x + 1) = (3x - 4)(3x + 4) - 9(x + 3)^2$
 8) $(3x + 4)(3x - 4) - (2x + 5)^2 = (x - 5)^2 + (2x + 1)^2 - (x^2 - 2x) + (x - 1)^2$
 9) $(x - 7)(x + 1) - (x - 3)^2 = (3x - 5)(3x + 5) - (3x + 1)^2 + (x - 2)^2 - x^2$
 10) $-5(x + 3)^2 + (x - 1)(x + 1) + (2x - 3)^2 = (5x - 2)^2 - 5x(5x + 3)$
 11) $(x - 1)^3 + 3(x - 3)^2 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = (x + 2)^3 - (x - 3)(x^2 + 9) - 6x^2 + 5$
 12) $(x - 5)(x + 5) - (x - 2)^3 - 7x^2 + (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x + 3)^3 - (x^3 + 9x^2)$
 13) $(x - 4)^3 - (x - 5)(x^2 + 5x + 25) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - (x + 4)^3 - (x - 7)$
 14) $(x + 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = (x - 3)^3 + 3(2x + 1)^2 - (x^3 - 5x + 1)$

$$15) -(x+5)(x^2-5x+25) + (x+3)^3 = (3x-2)^2 - (x-2)^3 - (6x^2-x^3)$$

$$16) (x-6)(x^2+6x+36) - (x+4)^3 = (x-2)^3 + (x+5)(x^2-10x+25) - (2x^3+6x^2)$$

$$17) (2x+3)(4x^2-6x+9) - (2x-1)^3 = (x+4)^3 - (x-2)(x^2+2x+4)$$

$$18) (4x-1)^3 + (3-4x)(9+12x+16x^2) = (8x-1)(8x+1) - (3x-5)$$

$$19) (3+2x)^3 - (6x-1)(6x+1) = (2x-1)^3 + (x+4)^2 - x^3 + (x+1)(x^2+x+1)$$

$$20) (2x+3)^3 - (2x+5)(4x^2-10x+25) = (6x-1)^2 - (x-2)(x^2+2x+4) + x^3$$

Bài 15: Chứng minh rằng: giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$1) A = 3(x-1)^2 - (x+1)^2 + 2(x-3)(x+3) - (2x+3)^2 - (5-20x)$$

$$2) B = 5x(x-7)(x+7) - x(2x-1)^2 - (x^3+4x^2-246x) - 175$$

$$3) C = -2x(3x+2)^2 + (4x+1)^2 + 2(x^3+8x+3x-2) - (5-x)$$

$$4) D = (5x-2)^2 - (6x+1)^2 + 11(x-2)(x+2) - 16(3-2x)$$

$$5) E = 4x(x-3) - (x-5)^2 - 3(x+1)^2 + (2x+2)^2 - (4x^2-5)$$

$$6) F = (2x-3)(x+2)(x-2) - 2(x+3)^3 - (x-4)^3 + (x-3)(x^2+3x+9) + (9x^2+110x)$$

$$7) G = (3x-1)(9x^2+3x+1) + (1-3x)^3 - 3x(9x-3) - (x+2)^3 + x(x^2+6x-12)$$

$$8) H = (x+5)(x^2-5x+25) - (2x+1)^3 + 7(x-1)^3 - 3x(-11x+5)$$

$$9) K = (x+4)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) - (x-2)^3 + (x+1)(x^2-x+1) - 18x^2 - 36x$$

$$10) L = (2-3x)^3 + 2x(x-3)^2 + (3x+1)(9x^2-3x+1) - 6x(7x-3) + 3x^3$$

$$11) M = (x+2)^3 - (x+2)(x^2-2x+4) + (x-5)^2 - 7x(x-1) - (9x-5)$$

$$12) N = (4x+1)(16x^2-4x+1) - (4x-1)^3 - 3x(16x-4)$$

$$13) P = (2x-3)^3 + (4-2x)(16+8x+4x^2) + (4x+3)(9x+1)$$

$$14) Q = (3x+2)^3 - 18x(3x+2) + (x-1)^3 - 28x^3 + 3x(x-1)$$

$$15) R = (4x-1)(16x^2+4x+1) - (4x+1)^3 + 12x(4x+1) - 15$$

$$16) S = (x+2)^3 - 6x(x+2) + (2x-1)^3 + 6x(2x-1) - 9(x^3-2)$$

$$17) T = (x-5)(x^2+5x+25) - (x+3)^3 + 9x(x+3) - (x+7)^2 + x(x+14)$$

$$18) U = (x^2+2)^3 - x^2(x^4-3) + 3x(5-x) - 6x^2(x^2+2)^3 - 15x$$

$$19) V = (x^2-3)^3 + 9x^2(x^3-3) - (x^2-3)(x^4+3x^2+9) - 20$$

$$20) X = (x^2-2)(x^4+2x^2+4)^2 - (x^2+2)^3 + 6x^2(x^2+2) - 10$$

Bài 16: Rút gọn và tính giá trị của các biểu thức sau:

$$1) A = (2x-3)^2 - (x-3)^3 + (4x+1)(16x^2-4x+1) \text{ tại } x = -2$$

$$2) B = (3x-y)^3 - (x+2y)(x^2-2xy+4y^2) + (3+x)^2 \text{ tại } x=1; y=2$$

$$3) C = (x-5y)^2 + (2x-3y)^3 - (x-y)^3 - (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$$

$$\text{tại } x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}$$

$$4) D = (x-2)^3 - (y-3)^2 + (x-y)(x^2+xy+y^2) - (x+y)^3 \text{ tại } x=1; y=\frac{1}{2}$$

$$5) E = (2x-y)(4x^2+2xy+y^2) - (3x+y)^3 + (x-2y)^3 \text{ tại } x=-1; y=2$$

$$6) F = (x+2y)^3 - (x-3y)^2 + (2y-3x)^3 + (x-y)^2 \text{ tại } x=-\frac{1}{2}; y=-1$$

$$7) G = (3x+1)^3 - (y-2)^2 + (y-1)^3 - (x+y)^2 \text{ tại } x=\frac{1}{3}; y=-3$$

$$8) H = (2x-y)^3 + (3x+2)^2 - (y+2)^3 - (x-3y)^2 \text{ tại } x=-2; y=\frac{1}{2}$$

$$9) K = (5x-4y)^2 - (x+2y)^3 - (4x+y)^2 + (2x-y)^3 \text{ tại } x=\frac{1}{2}; y=-\frac{1}{2}$$

$$10) L = (x-3)^3 - (x+y)^2 + (x-1)(x^2+x+1) + (x-y)^3 \text{ tại } x=1; y=-3$$

$$11) M = (2x+1)(4x^2-2x+1) - (2x-1)^3 - (x-3y)^2 \text{ tại } x=-\frac{1}{2}; y=\frac{1}{3}$$

$$12) N = (x-2y)^2 - (x+y)(x^2-xy+y^2) + (x+2y)^3 \text{ tại } x=-1; y=\frac{1}{2}$$

$$13) P = (3x+y)^3 - (2x-y)(2x+y) + (x-3y)^3 \text{ tại } x=\frac{1}{3}; y=-\frac{1}{3}$$

$$14) Q = (5x-2y)^2 - (x+3y)^3 + (2x+y)^2 - (x-2y)^3 \text{ tại } x=\frac{1}{5}; y=-\frac{1}{3}$$

$$15) R = (3x-2y)(x+y) - 3x(3x-2)^2 + (y+3x)^3 \text{ tại } x=\frac{1}{3}; y=-2$$

$$16) S = (2x+3)(4x^2-6x+9) - (2x-1)^3 + (x+5)^2 \text{ tại } x=-3$$

$$17) T = (3x+2y)^3 - 3x(3x-2)^2 + 2(x-y)(2x+y) \text{ tại } x=\frac{1}{2}; y=-\frac{1}{3}$$

$$18) U = (x+3y)^3 - (x+3y)(x^2-3xy+9y^2) - 2x(x-2)^2 \text{ tại } x=1; y=2$$

$$19) V = (x^2-3x)(x+1) - (x-3)^3 + (x+5)(x^2-10x+25) \text{ tại } x=-2$$

$$20) W = (2x-4)(4x^2+8x+16) - (x-2y)^3 + (y-1)^3 \text{ tại } x=-1; y=\frac{1}{2}$$

Bài 17: Tìm x, biết:

- 1) $(x-1)^2 - (x-2)(x+3) + (x+2)^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 9) + 6x(x+2)$
- 2) $(x-3)^3 - (2x+1)(4x^2 - 2x + 1) = (x+2)^3 - (2x-3)^3 - 18x(2x-3)$
- 3) $(x+2)^3 - (2x+3)^2 + (2x+3)(2x-3) = (x-2)(x^2 + 2x + 4) + 6x(x+2)$
- 4) $(3x-2)(9x^2 + 6x + 4) - (2x-5)(2x+5) = (3x-1)^3 - (2x+3)^2 + 9x(3x-1)$
- 5) $(2x+1)^3 - (3x+2)^2 = (2x-5)(4x^2 + 10x + 25) + 6x(2x+1) - 9x^2$
- 6) $(x-5)(x+5) - (x+4)^2 + (4x+1)^3 = (4x+2)(16x^2 - 8x + 4) + 12x(4x-1)$
- 7) $(3x-1)(2x+3) - 6(x-2)^2 + (3x-1)^3 = (3x+1)(9x^2 - 3x + 1) - 9x(3x-1)$
- 8) $(x+3)^2 - (x-2)(x+3) + (2x+1)^3 = 6x(2x+1) + (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$
- 9) $(4x+3)(16x^2 - 12x + 9) - (4x-1)^3 = (x+2)^2 + 12x(4x-1) - x(x+3)$
- 10) $(3-2x)^2 - (x-5)(4x+3) + (3+x)(9-3x+x^2) = (x+2)^3 - 6x(x+2)$
- 11) $(5x-2)(5x+2) - (3x+1)^3 = (5x+1)^2 - 9x(3x+1) - 27x^3$
- 12) $12x(x-4) - (x+1)(x^2 - x + 1) + (x-4)^3 = (x-3)(x+1) - (x+5)^2$
- 13) $9x(2-3x^2) + (3x-2)^3 = (2x-3)(2x+3) - 18x(3x-2) - 4x^2$
- 14) $(2x+5)^2 - (x-4)(x^2 + 4x + 16) = (2x-1)^2 - (x+2)^3 + 6x(x+2)$
- 15) $(4x+3)^3 - (4x+1)(16x^2 - 4x + 1) = 36x(4x+3) - x(x-1) + (x+2)^2$
- 16) $(3x+5)^2 - 9x(x-2) + (2x-3)^3 = (2x+1)(4x^2 - 2x + 1) - 18x(2x-3)$
- 17) $(x+3)(x-3) - (x+5)^3 = (x+4)^2 - 15x(x+5) + (1-x)(1+x+x^2)$
- 18) $(x-1)^3 - (3x-5)(3x+5) = (x-3)(x^2 + 3x + 9) - 3x(x-1) - 9x^2 + x$
- 19) $(x+5)(x-4) - (x+2)^2 + (2x+3)^3 = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1) + 18x(2x+3)$

Bài 18: Tìm x, biết

- 1) $2x + 1 > 3x - 5$
- 2) $2x + 1 > 3x - 5$
- 3) $5x - 7 \geq 2x + 6$
- 4) $7x + 3 \leq 3x - 5$
- 5) $3x - 8 > 4x - 12$
- 6) $-4x + 7 > 8x - 2$
- 7) $-3x + 8 < 2x - 5$
- 8) $12x - 4 \leq 3x + 12$
- 9) $-5x - 6 \geq 7x + 5$
- 10) $4x - 13 > 5x - 7$
- 11) $3(x-2) - 5 \geq 3(2x-1)$
- 12) $-5(x-2) + 2(x-3) \geq 7$
- 13) $4(x-7) \geq 5(2x-3) + 4$
- 14) $5x - 7(2x-5) < 2(x-1)$
- 15) $3(5x-2) - 2(x+4) \geq 3x-2$
- 16) $2x - 4(x+2) \geq 5(-2x+1)$
- 17) $-7x + 2(x-4) \leq 5 - 3(x-2)$
- 18) $6 - 7(x-4) \geq 3x + 2(3-x)$
- 19) $5x - 3(2-7x) > 5(x-2) + 8$
- 20) $10x - 3(x-5) > 3x - 2(x-4)$

Bài 19: Tìm x và biểu diễn các giá trị của x trên trục số

- 1) $(x-3)(x+2) - x(x+4) > 5x-2$
- 2) $(x+2)^2 - 4(x-3) \geq (x+1)(x-1)$
- 3) $(4x-1)(x+2) - 7x > (2x-1)(2x+1)$
- 4) $(4x-1)^2 - 2 \geq 16(x-1)(x+1) + 2x$
- 5) $(x+3)(x-1) < (x+1)^2 - 4$
- 6) $(x-4)^2 - (x+5)(x-5) \geq -8x + 41$
- 7) $(x-2)^2 + (x-3)(x+2) \leq -5x + 2x^2 - 2$
- 8) $(2x-3)^2 - 4x(x+1) > 4(1-4x) + 5$
- 9) $(x+2)^2 - (x-5)(x+5) > 2(2x-5)$
- 10) $(2x+1)(2x-1) - 4(x-1)^2 > 4(2x+1)$
- 11) $(x+2)(x^2 - 2x + 4) < 5 + (x^3 + 2x^2) - 2x^2 + x$

Bài 20: Tìm x và biểu diễn các giá trị của x trên trục số

- 1) $(x-1)^3 + (2-x)(4+x+x^2) > 17 - 3x(x+2)$
- 13) $6x^2 - 36 \geq 6x(x-2) - 5(2x+1)$
- 14) $(x+2)^2 + (x-3)^2 \geq 2(x-1)(x+1) + 9$
- 15) $(x+5)^2 - 6 > x(x-5) - (3x-7)$
- 16) $(x+3)(x^2 - 3x + 9) - 2x \geq x^3 - 7$
- 17) $3x(2x-7) + 2(5-3x^2) > x^2 - (x-1)(x+1)$
- 18) $(x-2)^3 + 6x^2 \geq x^3 + 7(2x-1)$
- 19) $(4x+3)^2 - 2 < (4x-3)^2 - (5x+4)$
- 20) $3(x-2)^2 + 9x \geq 12 + 3(x^2 - x + 3)$

Bài 20: Tìm x và biểu diễn các giá trị của x trên trục số

- 1) $\begin{cases} 1-x > 0 \\ x+4 < 0 \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 1-x > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 1-x < 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x+9 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} x+9 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} x+9 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$
- 7) $\begin{cases} 14-4x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$
- 8) $\begin{cases} 14-4x > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$
- 9) $\begin{cases} 14-4x < 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$
- 10) $\begin{cases} x-3 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$
- 11) $\begin{cases} x-3 < 0 \\ 2-x < 0 \end{cases}$
- 12) $\begin{cases} x-3 > 0 \\ 2-x < 0 \end{cases}$
- 13) $\begin{cases} x-3 < 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$
- 14) $\begin{cases} x+3 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$
- 15) $\begin{cases} x+3 < 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases}$
- 16) $\begin{cases} x+3 > 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases}$
- 17) $\begin{cases} x+3 < 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$
- 18) $\begin{cases} x+3 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$
- 19) $\begin{cases} x+1 < 0 \\ -2x+7 < 0 \end{cases}$
- 20) $\begin{cases} x+1 > 0 \\ -2x+7 < 0 \end{cases}$
- 21) $\begin{cases} x+1 < 0 \\ -2x+7 > 0 \end{cases}$

Bài 2. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử (phương pháp đặt thừa số chung)

- 1) $2a + 2b$
- 2) $2a - 2b$
- 3) $2a + 4b - 6c$
- 4) $3a - 6b - 9c$
- 5) $-4a - 8b - 12c$
- 6) $-5x - 10xy - 15y$
- 7) $-7a - 14ab - 21b$
- 8) $6xy - 12x - 18y$
- 9) $8xy - 24y + 16x$
- 10) $9ab - 18a + 9$
- 11) $xy - x$
- 12) $ax + a$
- 13) $mx + my + m$
- 14) $-ax - ay - a$
- 15) $-ax^2 - ax - a$
- 16) $-2ax - 4ay$
- 17) $2ax - 2ay + 2a$
- 18) $4ax - 2ay - 2$
- 19) $5a - 10ax - 15a$
- 20) $-2a^2b - 4ab^2 - 6ab$
- 21) $5ax - 15ay + 20a$
- 22) $3a^2x - 6a^2y + 12a$

$$\begin{aligned}
 &23) 2axy - 4a^2xy^2 + 6a^3x^2 \\
 &25) mxy - m^2x + my \\
 &27) a^2b - 2ab^2 + ab \\
 &29) -3x^2y^3 - 6x^3y^2 - x^2y^2 \\
 &31) -2x^3y^4 - 4x^4y^3 + 2x^3y^3 \\
 &33) -7x^2y^5 - 14x^3y^4 - 21y^3 \\
 &35) 12x^3y - 6xy + 3x \\
 &37) a(x - y) + b(x - y) \\
 &39) 2a(x + y) - 4(x + y) \\
 &41) 5a^2(x - y) + 10a(x - y) \\
 &43) 3a(x - y) + 2(x - y) \\
 &45) mx(a + b) - m(a + b) \\
 &47) a(x - 1) + b(1 - x) \\
 &49) a^2(x - 5) - a^2(5 - x) \\
 &51) 3ab(x - 4) + 9a(4 - x) \\
 &53) a(x - 3) - a^2(3 - x) \\
 &55) 5x^2y(x - 7) - 5xy(7 - x) \\
 &57) 4a(x - 5) - 2(5 - x) \\
 &59) 2a^2b(x + y) - 4a^3b(-x - y) \\
 &61) x^{m+1} - x^m \\
 &63) x^{m+2} - x^m \\
 &65) x^{m+2} - x^{m+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &24) 5a^2xy - 10a^3x - 15ay \\
 &26) 2mx - 4m^2xy + 6mx \\
 &28) 5a^2b - 2ab^2 + ab \\
 &30) 5x^2y^4 - 10x^4y^2 + 5x^2y^2 \\
 &32) 4x^3y^2 - 8x^2y^3 + 12x^4 \\
 &34) -8x^3y + 16xy^2 - 24 \\
 &36) 2(x - y) - a(x - y) \\
 &38) m(x + y) - n(x + y) \\
 &40) 3a(x + y) - 6ab(x + y) \\
 &42) -2ab(x - y) - 4a(x - y) \\
 &44) m(a - b) - m^2(a - b) \\
 &46) x(a - b) - y(b - a) \\
 &48) 2a(x + 2) + a^2(-x - 2) \\
 &50) 2a^2(x - y) - 4a(y - x) \\
 &52) -2a^2(x - 1) + 4a(1 - x) \\
 &54) 2xy(a - 1) - 4x^2y(1 - a) \\
 &56) 3ab(x - y) + 3a(y - x) \\
 &58) -3a(x - 3) - a^2(3 - x) \\
 &60) 7a(x - 2y) - 14a^2(2y - x) \\
 &62) x^{m+1} + x^m \\
 &64) x^{m+2} - x^2
 \end{aligned}$$

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử (phương pháp nhóm hạng tử)

$$\begin{aligned}
 &1) x(a - b) + a - b \\
 &3) m(x + y) + x + y \\
 &5) x + y + a(x + y) \\
 &7) a + b + x(a + b) \\
 &9) a - b - x(a - b) \\
 &11) x(a + b) - a - b \\
 &13) a(x + y) - x - y \\
 &15) -a - b + x(a + b) \\
 &17) ax + ay + 2x + 2y \\
 &19) ax + ay - 2x - 2y \\
 &21) x^2 + xy - 2x - 2y \\
 &23) x^2 - xy + 2x - 2y \\
 &25) 10ax - 5ay - 2x + y \\
 &27) 6a^2y - 3aby + 4a^2x - 2abx \\
 &29) 10ay^2 - 5by^2 + 2a^2x - aby \\
 &31) 2a^2x - 5by - 5a^2y + 2bx \\
 &33) 3a^2x - 3a^2y + abx - aby \\
 &35) 2ax^3 + 6ax^2 + 6ax + 18a \\
 &37) 3ax^2 + 3bx^2 + ax + bx + 5a + 5b \\
 &39) 2ax^2 - bx^2 - 2ax + bx + 4a - 2b \\
 &2) x(a + b) + a + b \\
 &4) m(x - y) + x - y \\
 &6) x - y - a(x - y) \\
 &8) a - b + x(a - b) \\
 &10) a - b - x(b - a) \\
 &12) a(x - y) - x + y \\
 &14) x(a - b) - a + b \\
 &16) ax + ay + bx + by \\
 &18) ax + ay - bx - by \\
 &20) -2x - 2y + ax + ay \\
 &22) x^2 - xy - 2x + 2y \\
 &24) 10ax - 5ax - 5ay + 2x - y \\
 &26) 5x^2y + 5xy^2 - a^2x + a^2y \\
 &28) 2x^2 - 6xy + 5x - 15y \\
 &30) ax^2 - 3axy + bx - 3by \\
 &32) 5ax^2 - 3axy + 3ay^2 - 3axy \\
 &34) 4acx + 4bcx + 4ax + 4bx \\
 &36) ax^2y - bx^2y - ax + bx + 2a - 2b \\
 &38) ax^2 - bx^2 - 2ax + 2bx - 3a + 3b \\
 &40) ax^2 - 5x^2 - ax + 5x + a - 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &41) ax + bx + cx + a + b + c \\
 &43) ax - bx + cx - 3a + 3b - 3c \\
 &45) ax - bx - 2cx - 2a + 2b + 4c
 \end{aligned}$$

Bài 3: Tìm x, biết:

$$\begin{aligned}
 &1) x^2 - 7x = 0 \\
 &2) -3x^2 + 5x = 0 \\
 &5) x^2 + 2x - 3x - 6 = 0 \\
 &7) x^2 + 4x - 5x - 20 = 0 \\
 &9) x^2 + 10x - 2x - 20 = 0 \\
 &11) x^2 + 20x - x - 20 = 0 \\
 &13) x^2 - 12x - 2x + 24 = 0 \\
 &15) x^2 - 6x - 4x + 24 = 0 \\
 &17) x^2 - 8x - 3x + 24 = 0 \\
 &19) x^2 - 8x + 3x - 24 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &42) ax + bx + cx - 2a - 2b + 2c \\
 &44) 2ax - bx + 3cx - 2a + b - 3c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &3) x^2 + 3x - 2x - 6 = 0 \\
 &4) x^2 + 6x - x - 6 = 0 \\
 &6) x^2 - 4x + 5x - 20 = 0 \\
 &8) x^2 - 10x + 2x - 20 = 0 \\
 &10) x^2 - 20x + x - 20 = 0 \\
 &12) x^2 + 12x + 2x + 24 = 0 \\
 &14) x^2 + 6x + 4x + 24 = 0 \\
 &16) x^2 + 8x + 3x + 24 = 0 \\
 &18) x^2 + 8x - 3x - 24 = 0 \\
 &20) x^2 - 5x - 24 = 0
 \end{aligned}$$

Bài 4: Phân tích thành nhân tử (phương pháp dùng hằng đẳng thức)

$$\begin{aligned}
 &1) a^2 - 4b^2 \\
 &4) 25a^2 - 1 \\
 &7) 121 - a^2 \\
 &10) 144a^2 - 81 \\
 &13) 25a^2 - 49b^4 \\
 &16) \frac{1}{4}a^2 - b^2 \\
 &19) 25a^2 - \frac{1}{4}b^2 \\
 &22) (a + b)^2 - 4 \\
 &25) (a - 5b)^2 - 16b^2 \\
 &28) 49a^2 - (2a - b)^2 \\
 &31) (a - 2b)^2 - (3a + b)^2 \\
 &33) (4a + 3b)^2 - (b - 2a)^2 \\
 &35) 9(a + b)^2 - 4(a - 2b)^2 \\
 &37) 25(x - 3)^2 - (2x - 7)^2 \\
 &39) 81(x + 7)^2 - (3x + 8)^2 \\
 &41) x^2 + 10x + 25 \\
 &43) x^2 + 6x + 9 \\
 &45) x^2 + 12x + 36 \\
 &47) 9x^2 + 12x + 4 \\
 &49) 4x^4 + 20x^2 + 25 \\
 &51) 25x^2 - 20xy + 4y^2 \\
 &2) 4a^2 - b^2 \\
 &5) a^2 - 9 \\
 &8) 64a^2 - 9 \\
 &11) 36a^2 - 49b^2 \\
 &14) 100a^2 - 9b^4 \\
 &17) \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2 \\
 &20) \frac{1}{25} - 36x^2 \\
 &23) (a - 2b)^2 - 4b^2 \\
 &26) 25a^2 - (a - b)^2 \\
 &29) 36a^2 - (3a - 2b)^2 \\
 &32) (5a - b)^2 - (2a + 3b)^2 \\
 &34) (2a - b)^2 - 4(a - b)^2 \\
 &36) 4(2a - b)^2 - 16(a - b)^2 \\
 &38) 49(x - 5)^2 - (x + 4)^2 \\
 &40) 36(x - y) - 25(2x - 1)^2 \\
 &42) x^2 + 8x + 16 \\
 &44) x^2 + 14x + 49 \\
 &46) 4x^2 + 12x + 9 \\
 &48) 16x^2 + 8x + 1 \\
 &50) 9x^4 + 24x^2 + 16 \\
 &52) 4x^2 - 12xy + 9y^2 \\
 &3) a^2 - 25 \\
 &6) 9a^2 - 1 \\
 &9) 81a^2 - 25 \\
 &12) 196a^2 - 4b^2 \\
 &15) a^4 - 4b^2 \\
 &18) \frac{4}{9}a^4 - \frac{25}{4} \\
 &21) (a - b)^2 - c^2 \\
 &24) (a + 3b)^2 - 9b^2 \\
 &27) 4a^2 - (a + b)^2 \\
 &30) 81a^2 - (5a - 3b)^2
 \end{aligned}$$

- 53) $25x^2 - 10xy + y^2$
 55) $9x^2 - 30x + 25$
 57) $4x^4 - 16x^2y^3 + 16y^6$
 59) $x^{10} - 4x^8 + 4x^6$
 61) $m^3 + 27$
 63) $\frac{1}{27} + a^3$
 65) $\frac{1}{8}x^3 + 8y^3$
 67) $\frac{1}{8}x^3 - 8$
 69) $(a + b)^3 - c^3$
 71) $125 - (x + 2)^3$
 73) $(x - 5)^3 - 27$
 75) $(x + 4)^3 - 64$
 77) $x^6 - 1$
 79) $x^{12} - y^4$
 81) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
 83) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
 85) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$
 87) $m^3 - 6m^2 + 12m - 8$
 89) $64 - 48m + 12m^2 - m^3$
 91) $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$
 93) $27a^3 - 27a^2 + 9a - 1$
 95) $27a^3 - 54ab + 36ab^2 - 8b^3$

Bài 5: Tìm x, biết

- 1) $x^2 - 4 = 0$
 3) $x^2 - 36 = 0$
 5) $x^2 - 49 = 0$
 7) $3x^2 - 75 = 0$
 9) $2x^2 - 98 = 0$
 11) $(x + 3)^2 = 4$
 13) $(x - 7)^2 = 36$
 15) $x^2 + 6x + 9 = 0$
 17) $x^2 - 14x + 49 = 0$
 19) $x^2 + 10x + 25 = 0$
 21) $x^2 + 6x + 5 = 0$
 23) $x^2 - 14x + 13 = 0$
 25) $x^2 + 10x + 16 = 0$
 27) $x^2 + 8x + 7 = 0$
 29) $4x^2 + 12x + 5 = 0$
 31) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
 33) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$
 35) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0$

- 54) $x^4 - 4x^2y + 4y^2$
 56) $9x^4 - 12x^2y + 4y^2$
 58) $9x^4 - 12x^5 + 4x^6$
 60) $9x^6 - 12x^7 + 4x^8$
 62) $x^3 + 8$
 64) $8x^3 + 27y^3$
 66) $8x^6 - 27y^3$
 68) $\frac{1}{64}x^6 - 125y^3$
 70) $x^3 - (y - 1)^3$
 72) $(x + 3)^3 - 8$
 74) $(x + 1)^3 - 125$
 76) $x^6 + 1$
 78) $x^6 - y^6$
 80) $x^9 + 1$
 82) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
 84) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
 86) $m^3 - 3m^2 + 3m - 1$
 88) $27 - 27m + 9m^2 - m^3$
 90) $125 - 75m + 9m^2 - m^3$
 92) $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$
 94) $27a^3 - 27a^2 + 9a + 1$

- 2) $x^2 - 25 = 0$
 4) $x^2 - 81 = 0$
 6) $2x^2 - 8 = 0$
 8) $2x^2 - 72 = 0$
 10) $2x^2 - 162 = 0$
 12) $(x + 2)^2 = 25$
 14) $(x - 1)^2 - 81 = 0$
 16) $x^2 + 4x + 4 = 0$
 18) $x^2 - 2x + 10 = 0$
 20) $x^2 - 12x + 36 = 0$
 22) $x^2 + 4x - 21 = 0$
 24) $x^2 - 2x - 80 = 0$
 26) $x^2 - 12x + 11 = 0$
 28) $4x^2 - 4x - 3 = 0$
 30) $4x^2 - 12x - 7 = 0$
 32) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$
 34) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$
 36) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$

- 37) $x^3 + 3x^2 + 3x = 0$
 39) $x^3 + 6x^2 + 12x = 0$
 41) $x^3 = 4x$
 43) $x^3 = 36x$

Bài 6: Phân tích thành nhân tử (phối hợp các phương pháp)

- 1) $5x^2 + 10xy + 5y^2$
 2) $6x^2 + 12xy + 6y^2$
 3) $2x^3 + 4x^2y + 2xy^2$
 4) $-3x^4y - 6x^3y^2 - 3x^2y^3$
 5) $4x^5y^2 + 8x^4y^3 + 4x^3y^4$
 6) $-3x^2 - 12x - 12$
 7) $2x^3 + 8x^2 + 8x$
 8) $-3x^4y - 12x^2y - 12x^2y$
 9) $4x^5y^2 + 16x^4y^2 + 16x^3y^2$
 10) $5x^4y^2 + 20x^3y^2 + 20x^2y^2$
 11) $7x^2 - 14x + 7$
 12) $2x^3 - 4x^2 + 2x$
 13) $-3x^4y + 6x^3y - 3x^2y$
 14) $4x^5y^2 - 8x^4y^2 + 4x^3y^2$
 15) $5x^4y^2 - 10x^3y^2 + 5x^2y^2$
 16) $12x^2 - 12xy + 3y^2$
 17) $8x^3 - 8x^2y + 2xy^2$
 18) $20x^4y^2 - 20x^3y^3 + 5x^2y^4$
 19) $16x^5y^2 - 16x^4y^3 + 4x^3y^4$
 20) $-12x^4y + 12x^3y^2 - 3x^2y^3$
 21) $(a^2 + 4)^2 - 16a^2$
 22) $(a^2 + 9)^2 - 36a^2$
 23) $(a^2 + 4b^2)^2 - 16a^2b^2$
 24) $36a^2 - (a^2 + 9)^2$
 25) $100a^2 - (a^2 + 25)^2$
 26) $x^2 + 2xy + y^2 - 25$
 27) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 36z^2$
 28) $4a^2 - x^2 - 2x - 1$
 29) $25a^2b^2 - 4x^2 + 4x - 1$
 30) $36x^2 - a^2 + 10a - 25$
 31) $x^2 - 2x + 1 - a^2 - 2ab - b^2$
 32) $x^2 + 4xy + 4y^2 - a^2 + 2ab - b^2$
 33) $1 - 2m + m^2 - x^2 - 4x - 4$
 34) $m^2 - 6m + 9 - x^2 + 4xy - 4y^2$
 35) $4x^2 - 4xy + y^2 - 25a^2 + 10a - 136$
 36) $x^2(a - b)m - 2xy(a - b) + ay^2 - by^2$
 37) $ax^2 + bx^2 + 2xy(a + b) + 2ay^2 + by^2$
 38) $ax^2 + bx^2 + 2axy + 2xy + ay^2 + by^2$
 39) $x^2(a + b) - 4ax - 4bx + 4a + 4b$
 40) $ax^2 + bx^2 - 6ax + 6bx + 9a + 9b$
 41) $5a^2 - 5$
 42) $10a^3 - 10a$
 43) $-12x^3y + 75xy^3$
 44) $8a^2xy - 18b^2xy$
 45) $9xy - 4a^2xy$
 46) $2xm^3 - 2x$
 47) $8a^3x - 27b^3x$
 48) $16a^3xy - 54b^3xy^4$
 49) $-4 + 32a^3b^3$
 50) $5xy - 40a^3b^3xy$
 51) $2x^3 + 16$
 52) $-16a^2bx^3 - 54a^2b$
 53) $-5x^3y^3 - 5x^3y^3$
 54) $16 + 2x^3y^3$
 55) $3x^5y^3 + 3x^2y^6$
 56) $2(a + b)^3 + 16$
 57) $ab(x - y)^3 + 8ab$
 58) $27xy + xy(a + b)^3$
 59) $8xy^3 + x(x - y)^3$
 60) $(a + b)^3 + c^3$
 61) $x^2 + (a + b)xy + aby^2$
 62) $x^2 - (a + b)xy + aby^2$
 63) $x^2 - (2a + b)xy + 2aby^2$
 64) $x^2 + (2a + b)xy + 2aby^2$
 65) $y^2 - (3b + 2a)xy + 6abx^2$
 66) $y^2 + (3b + 2a)xy + 6abx^2$
 67) $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$
 68) $xy(a^2 + b^2) - ab(x^2 + y^2)$
 69) $xy(a^2 + 2b^2) + ab(2x^2 + y^2)$
 70) $xy(a^2 + 2b^2) - ab(2x^2 + y^2)$
 71) $3xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + 9y^2)$
 72) $3xy(a^2 + b^2) - ab(x^2 + 9y^2)$
 73) $(xy + ab)^2 + (ay - bx)^2$
 74) $(xy - ab)^2 + (bx - ay)^2$
 75) $(xy + 4ab)^2 + 4(ay - bx)^2$
 76) $(2xy + ab)^2 + (2ay - bx)^2$
 77) $(xy - 3ab)^2 + (3ay + bx)^2$

BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử (bằng kĩ thuật bổ sung hằng đẳng thức)

- | | |
|----------------------------------------|------------------------------------------|
| 1) $x^2 - 5x + 6$ | 2) $x^2 + 5x + 6$ |
| 3) $x^2 - 7x + 12$ | 4) $x^2 + 7x + 12$ |
| 5) $x^2 + x - 12$ | 6) $x^2 - x - 12$ |
| 7) $x^2 - 9x + 20$ | 8) $x^2 + 9x + 20$ |
| 9) $x^2 + x - 20$ | 10) $x^2 - x - 20$ |
| 11) $2x^2 - 3x - 2$ | 12) $3x^2 + x - 2$ |
| 13) $4x^2 - 7x - 2$ | 14) $4x^2 + 5x - 6$ |
| 15) $4x^2 + 15x + 9$ | 16) $3x^2 + 10x + 3$ |
| 17) $5x^2 + 14x - 3$ | 18) $5x^2 - 18x - 8$ |
| 19) $6x^2 + 7x - 3$ | 20) $x^2 - xy - 2y^2$ |
| 21) $x^2 + xy - 2y^2$ | 22) $x^2 - 3xy - 2y^2$ |
| 23) $x^2 - xy - 6y^2$ | 24) $2x^2 - 3xy - 2y^2$ |
| 25) $6x^2 - xy - y^2$ | 26) $2x^2 + 5xy + y^2$ |
| 27) $6x^2 + 2xy - 4y^2$ | 28) $2x^2 + 2xy - 4y^2$ |
| 29) $3x^2 + 8xy - 3y^2$ | 30) $x^2 - x - xy - 2y^2 + 2y$ |
| 31) $x^2 + 2y^2 - 3xy + x - 2y$ | 32) $x^2 + x - xy - 2y^2 + y$ |
| 33) $x^2 - 4xy - x + 3y^2 + 3y$ | 34) $x^2 + 4xy + 2x + 3y^2 + 6y$ |
| 35) $6x^2 + xy - 7x - 2y^2 + 7y - 5$ | 36) $6a^2 - ab - 2b^2 + a + 4b - 2$ |
| 37) $3x^2 - 22xy - 4x + 8y + 7y^2 + 1$ | 38) $2x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 3 - 10xy$ |
| 39) $2a^2 + 5ab - 3b^2 - 7b - 2$ | 40) $2x^2 - 7xy + x + 3y^2 - 3y$ |
| 41) $6x^2 - xy - 2y^2 + 3x - 2y$ | 42) $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 2x + 3y$ |
| 43) $2x^2 - 3xy - 4x - 9y^2 - 6y$ | 44) $3x^2 - 5xy + 2y^2 + 4x - 4y$ |

Bài 2: Phân tích thành nhân tử (bằng kĩ thuật tách hạng tử).

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) $3x^2 + 7x - 6$ | 2) $3x^2 + 3x - 6$ |
| 3) $3x^2 - 3x - 6$ | 4) $6x^2 - 13x + 6$ |
| 5) $6x^2 + 13x + 6$ | 6) $6x^2 + 15x + 6$ |
| 7) $6x^2 - 15x + 6$ | 8) $6x^2 + 20x + 6$ |
| 9) $6x^2 - 20x + 6$ | 10) $6x^2 + 12x + 6$ |
| 11) $8x^2 - 2x - 3$ | 12) $8x^2 + 2x - 3$ |
| 13) $-8x^2 + 5x + 3$ | 14) $8x^2 - 10x - 3$ |
| 15) $8x^2 + 10x - 3$ | 16) $-8x^2 + 23x + 3$ |
| 17) $8x^2 - 23x - 3$ | 18) $10x^2 - 11x - 6$ |
| 19) $-10x^2 + 11x + 6$ | 20) $10x^2 - 4x - 6$ |
| 21) $-10x^2 + 4x + 6$ | 22) $10x^2 + 7x - 6$ |
| 23) $-10x^2 - 7x + 6$ | 24) $10x^2 + 17x - 6$ |
| 25) $-10x^2 - 17x + 6$ | 26) $-10x^2 + 28x + 6$ |
| 27) $10x^2 - 28x - 6$ | 28) $10x^2 - 7x - 12$ |
| 29) $-10x^2 + 7x + 12$ | 30) $10x^2 - 14x - 12$ |

RÈN KĨ NĂNG SUY LUẬN

ĐƠN THỨC - ĐA THỨC - HẸNG ĐẲNG THỨC

Bài 1: Rút gọn bằng cách thay số bằng chữ

- $A = x^6 - 2007x^5 + 2007x^4 - 2007x^3 + 2007x^2 - 2007x + 2007$
với $x = 2006$
- $B = x^{10} - 2006x^9 + 2006x^8 - 2006x^7 + \dots + 2006x^2 - 2006x$ với $x = 2005$
- $C = x^{30} - 2000x^{29} + 2000x^{28} - 2000x^{27} + \dots + 2000x^2 - 2000x + 2000$
với $x = 2006$
- $D = x^{10} + 20x^9 + 20x^8 + \dots + 20x^3 + 20x^2 + 20x$ với $x = -24$
- $E = x^{20} + 25x^{19} + 25x^{18} + 25x^{17} + \dots + 25x^3 + 25x^2 + 25x + 25$ với $x = -24$
- $F = 5 \frac{6}{4453} \cdot \frac{1}{1997} \cdot \frac{2}{1997} \cdot \frac{3}{4453}$
- $G = 4 \frac{7}{5741} \cdot \frac{1}{3759} \cdot \frac{4}{3759} \cdot \frac{2}{5741} + \frac{1}{3759} + \frac{1}{3759 \cdot 5741}$
- $H = 4 \frac{7}{1000} \cdot \frac{1}{999} \cdot \frac{1}{500} \cdot \frac{4}{999} + \frac{1001}{999 \cdot 1000}$
- $K = 2 \frac{1}{3179} \cdot \frac{3}{1111} \cdot \frac{1}{3179} \cdot \frac{1}{1111} \cdot \frac{4}{3179 \cdot 1111}$
- $L = 2 \frac{1}{3150} \cdot \frac{3}{6517} \cdot \frac{1}{1050} \cdot \frac{3}{6517} + \frac{4}{1050} - \frac{6}{3150 \cdot 6517}$
- $M = \frac{1}{4587} \cdot \frac{7}{3897} - 3 \frac{4586}{4587} \cdot \frac{2}{3897} - \frac{7}{4587} - \frac{3}{4587 \cdot 3897}$
- $N = 999994.999999.999992 - 999996.999991.999998$
- $P = 444443.444448.444441 - 444445.444440.444447$
- $Q = 777775.777780.777773 - 777777.777772.777779$
- $R = 888887.888892.888885 - 888889.888884.888891$

Bài 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

- $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
- $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$
- $(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$
- $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
- $a^3 + b^3 + c^3 - abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
- $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = (a+b)(b+c)(c+a)$
- $(a+b+c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$
- $(a+b+c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 + (a+c-b-d)^2 + (a+d-b-c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
- Cho: $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- Cho: $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng: $(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a^4 + b^4 + c^4)$
- Cho: $a + b + c + d = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c+d)(ab - cd)$

14) Chứng minh rằng nếu có $(a + b + c + d)(a - b - c + d)(a - b + c - d)(a + b - c - d)$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

15) Chứng minh rằng nếu có $(a + b + c)^2 = 3ab + 3bc + 3ca$ thì $a = b = c$

Bài 3: Chứng minh rằng các biểu thức sau có giá trị dương với mọi giá trị của x:

1) $A = x^2 + 2x + 2$

2) $B = x^2 + 4x + 6$

3) $C = x^2 - x + 1$

4) $D = x^2 + x + 1$

5) $E = x^2 + 3x + 3$

6) $F = 2x^2 + 4x + 3$

7) $G = 3x^2 - 5x + 3$

8) $H = 4x^2 + 4x + 2$

9) $K = 4x^2 + 3x + 2$

10) $L = 2x^2 + 3x + 4$

Bài 4: Chứng minh rằng các biểu thức sau có giá trị âm với mọi giá trị của x:

1) $A = -x^2 - 2x - 2$

2) $B = -x^2 - 4x - 7$

3) $C = -x^2 - 6x - 11$

4) $D = -x^2 - x - 1$

5) $E = -x^2 - 3x - 5$

6) $F = -3x^2 - 6x - 4$

7) $G = -5x^2 + 7x - 3$

8) $H = -4x^2 - 6x - 4$

9) $K = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1$

10) $L = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 5$

Bài 5: Viết các biểu thức sau dưới dạng tổng của hai bình phương

1) $x^2 - 2x + 2 + 4y^2 + 4y$

2) $4x^2 - 4x + y^2 + 2y + 2$

3) $4x^2 + 4x + 4y^2 + 4y + 2$

4) $4x^2 + y^2 + 12x + 4y + 13$

5) $-12x + 13 - 24y + 9x^2 + 16y^2$

6) $a^2 - 4ab + 5b^2 - 4bc + 4c^2$

7) $5x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 2xz$

8) $9x^2 + 25 - 12xy + 2y^2 - 10y$

9) $13x^2 + 4x - 12xy + 4y^2 + 1$

10) $x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 5$

11) $4x^2 - 12x + y^2 - 4y + 13$

12) $x^2 + y^2 + 2y - 6x + 10$

13) $4x^2 + 9y^2 - 4x + 6y + 2$

14) $y^2 + 2y + 5 - 12x + 9x^2$

15) $x^2 + 26 + 6y + 9y^2 - 10x$

16) $10 - 6x + 12y + 9x^2 + 4y^2$

17) $16x^2 + 5 + 8x - 4y + y^2$

18) $x^2 + 9y^2 + 6y + 5 + 4x$

19) $5 + 9x^2 + 9y^2 + 6y - 12$

20) $x^2 + 20 + 9y^2 + 8x - 12y$

21) $x^2 + 4y + 4y^2 + 26 - 10x$

22) $4y^2 + 34 - 10x + 12y + x^2$

23) $-10x + y^2 - 8y + x^2 + 41$

24) $x^2 + 9y^2 - 12y + 29 - 10x$

25) $9x^2 + 4y^2 + 4y - 12x + 5$

26) $4y^2 - 12x + 12y + 9x^2 + 13$

27) $4x^2 + 25 - 12x - 8y + y^2$

28) $x^2 + 17 + 4y^2 + 8x + 4y$

29) $4y^2 + 12y + 25 + 8x + x^2$

30) $x^2 + 20 + 9y^2 + 8x - 12y$

Bài 6: Tìm x và y, biết:

1) $x^2 - 2x + 5 + y^2 - 4y = 0$

2) $4x^2 + y^2 - 20x - 2y + 26 = 0$

3) $x^2 + 4y^2 + 13 - 6x - 8y = 0$

4) $4x^2 + 4x - 6y + 9y^2 + 2 = 0$

5) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 = 0$

6) $25x^2 - 10x + 9y^2 - 12y + 5 = 0$

7) $x^2 + 9y^2 + -10x - 12y + 29 = 0$

8) $9x^2 + 12x + 4y^2 + 8y + 8 = 0$

9) $4x^2 + 9y^2 + 20x - 6y + 26 = 0$

10) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y + 15 = 0$

11) $x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 5 = 0$

12) $4x^2 - 12x + y^2 - 4y + 13 = 0$

13) $x^2 + y^2 + 2y - 6x + 10 = 0$

14) $4x^2 + 9y^2 - 4x + 6y + 2 = 0$

15) $y^2 + 2y + 5 - 12x + 9x^2 = 0$

16) $x^2 + 26 + 6y + 9y^2 - 10x = 0$

17) $10 - 6x + 12y + 9x^2 + 4y^2 = 0$

18) $16x^2 + 5 + 8x - 4y + y^2 = 0$

19) $x^2 + 9y^2 + 6y + 5 + 4x = 0$

20) $5 + 9x^2 + 9y^2 + 6y - 12 = 0$

21) $x^2 + 20 + 9y^2 + 8x - 12y = 0$

22) $x^2 + 4y + 4y^2 + 26 - 10x = 0$

23) $4y^2 + 34 - 10x + 12y + x^2 = 0$

24) $-10x + y^2 - 8y + x^2 + 41 = 0$

25) $x^2 + 9y^2 - 12y + 29 - 10x = 0$

26) $9x^2 + 4y^2 + 4y - 12x + 5 = 0$

27) $4y^2 - 12x + 12y + 9x^2 + 13 = 0$

28) $4x^2 + 25 - 12x - 8y + y^2 = 0$

29) $x^2 + 17 + 4y^2 + 8x + 4y = 0$

30) $4y^2 + 12y + 25 + 8x + x^2 = 0$

31) $x^2 + 20 + 9y^2 + 8x - 12y = 0$

Bài 7: 1) a) Chứng minh tích hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8

b) Chứng minh tích ba số chẵn liên tiếp chia hết cho 48

2) Chứng minh $n^5 - n$ chia hết cho 5 ($n \in \mathbb{Z}$)

3) Chứng minh $n^3 - 13n$ chia hết cho 6 ($n \in \mathbb{Z}$)

4) Chứng minh $n^3 + 23n$ chia hết cho 6 ($n \in \mathbb{Z}$)

5) Chứng minh $n(n + 1)(2n + 1)$ chia hết cho 6 ($n \in \mathbb{Z}$)

6) Chứng minh $3n^4 - 14n^3 + 21n^2 - 10n$ chia hết cho 24 ($n \in \mathbb{Z}$)

7) Cho n là số nguyên lẻ. Chứng minh $n^2 + 4n + 3 : 8$

8) Cho n là số nguyên lẻ. Chứng minh $n^3 + 3n^2 - n - 3 : 48$

9) Cho $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$. Đặt $S = a_1 + a_2 + a_3$

$$P = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3$$

Chứng minh rằng $S : 6 \Leftrightarrow P : 6$

10) Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$. Đặt $A = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$

$$B = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^3$$

Chứng minh rằng: $A : 6 \Leftrightarrow B : 6$

11) Cho $M = 2n^4 - 7n^3 - 2n^2 + 13n + 6$ ($n \in \mathbb{Z}$). Chứng minh $M : 6$

Bài 8:

- 1) Cho $f(x) = x^2 + 5x + a$ và $g(x) = x + 1$. Tìm giá trị của a để $f(x):g(x)$
- 2) Cho $f(x) = 2x^2 + 3x + a$ và $g(x) = x + 2$. Tìm giá trị của a để $f(x):g(x)$
- 3) Cho $f(x) = -3x^2 - x + a$ và $g(x) = x - 4$. Tìm giá trị của a để $f(x):g(x)$
- 4) Cho $f(x) = 2x^2 - 5x + a$ và $g(x) = 2x + 1$. Tìm giá trị của a để $f(x):g(x)$
- 5) Cho $f(x) = x^2 + ax + b$ và $g(x) = x - 1$. Tìm giá trị của a và b để $f(x):g(x)$
- 6) Cho $f(x) = 2x^2 + mx - n$ và $g(x) = 2x + 4$. Tìm giá trị của m và n để $f(x):g(x)$
- 7) Cho $f(x) = 3x^2 + mx - 5$ và $g(x) = x + 2$. Tìm giá trị của m để $f(x):g(x)$
- 8) Cho $f(x) = x^2 - 4x + m$ và $g(x) = x - 5$. Tìm giá trị của m để $f(x):g(x)$

Bài 3. PHÂN TÍCH ĐA THỨC RA NHÂN TỬ

DẠNG THÊM BỐT KHI SỐ MŨ CHIA 3
DƯ 1, SỐ MŨ CHIA 3 DƯ 2

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $x^5 + x + 1$ | 2) $x^8 + x + 1$ |
| 3) $x^{11} + x + 1$ | 4) $x^5 + x^2 + 1$ |
| 5) $x^7 + x^2 + 1$ | 6) $x^8 + x^7 + 1$ |
| 7) $x^7 + x^5 + 1$ | 8) $x^{10} + x^5 + 1$ |
| 9) $x^{10} + x^8 + 1$ | 10) $x^{11} + x^{10} + 1$ |
| 11) $x^{11} + x^4 + 1$ | 12) $x^{11} + x^7 + 1$ |
| 13) $x^4 + 2002x^2 + 2001x + 2002$ | 14) $x^4 + 2005x^2 + 2004x + 2005$ |
| 15) $x^4 + 1999x^2 + 1998x + 1999$ | 16) $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$ |
| 17) $x^4 + 1996x^2 + 1995x + 1996$ | 18) $x^4 + 2007x^2 + 2006x + 2007$ |
| 19) $x^4 + 2002x^2 - 2001x + 2002$ | 20) $x^4 + 2005x^2 - 2004x + 2005$ |
| 21) $x^4 + 1999x^2 - 1998x + 1999$ | 22) $x^4 + 1997x^2 - 1996x + 1997$ |
| 23) $x^4 + 1996x^2 - 1995x + 1996$ | 24) $x^4 + 2007x^2 - 2006x + 2007$ |

DẠNG ĐÔI XUNG VÒNG QUANH**Bài 2:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- 1) $xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x)$
- 2) $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$
- 3) $mn(m - n) + np(n - p) + pm(p - m)$
- 4) $(a + b)(b + c)(c - a) + (b + c)(c + a)(a - b) + (c + a)(a + b)(b - c)$
- 5) $(b + c)(c + a)(b - a) + (b + c)(a + b)(a - c) + (a - b)(b - c)(a - c)$
- 6) $(a - b)(b - c)(a - c) + (a + b)(c + a)(c - b) + (b + c)(c + a)(b - a)$
- 7) $(a - b)(b - c)(a - c) + (a + b)(b + c)(a - c) + (a + b)(a + c)(c - b)$
- 8) $-(mab + n)(a - b) - (mbc + n)(b - c) - (mca + n)(c - a)$
- 9) $-(kxy + m)(x - y) - (kyz + m)(y - z) - (kzx + m)(z - x)$
- 10) $(aut + n)(u - t) + (auv + n)(v - u) + (atv + n)(t - v)$
- 11) $bc(a + d)(b - c) + ac(b + d)(c - a) + ab(c + d)(a - b)$
- 12) $-xy(z + m)(y - x) - yz(x + m)(z - y) - zx(y + m)(x - z)$
- 13) $tu(v + w)(t - u) + uv(t + w)(u - v) + vt(u + w)(v - t)$
- 14) $ab(a + b) - bc(b + c) + ac(a - c)$
- 15) $ac(a + c) - bc(b + c) + ab(a - b)$
- 16) $ab(a + b) + bc(b - c) - ac(a + c)$
- 17) $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$
- 18) $a^2b^2(a - b) + b^2c^2(b - c) + c^2a^2(c - a)$
- 19) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$
- 20) $ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)$
- 21) $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$
- 22) $(a + b)(a^2 - b^2) + (b + c)(b^2 - c^2) + (c + a)(c^2 - a^2)$
- 23) $a(b + c)(b^2 - c^2) + b(c + a)(c^2 - a^2) + c(a + b)(a^2 - b^2)$
- 24) $a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$
- 25) $(x - y)z^3 + (z - x)y^3 + (y - z)x^3$
- 26) $(a - x)y^3 - (a - y)x^3 + (x - y)a^3$
- 27) $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$
- 28) $x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1)$
- 29) $x^3(y + z^2) + y^3(z - x^2) - z^3(x - y^2) - xyz(xyz + 1)$
- 30) $y^3(z - x^2) - z^3(x + y^2) - x^3(y - z^2) + xyz(xyz + 1)$
- 31) $z^3(x + y^2) + y^3(z - x^2) - x^3(y + z^2) - xyz(xyz - 1)$
- 32) $x^3(y + z^2) - y^3(z + x^2) + z^3(x - y^2) - xyz(xyz - 1)$
- 33) $x^3(y + z^2) + y^3(z + x^2) + z^3(x + y^2) + xyz(xyz + 1)$
- 34) $a^4(b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2)$
- 35) $x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2 - x^3 - y^3 - z^3 + 4xyz$
- 36) $x(y + z)^2 - y(z - x)^2 + z(x + y)^2 - x^3 + y^3 - z^3 - 4xyz$
- 37) $x(y + z)^2 + y(z + x)^2 - z(x - y)^2 - x^3 - y^3 + z^3 - 4xyz$
- 38) $z(x + y)^2 + y(z + x)^2 - x(y - z)^2 + x^3 - y^3 - z^3 - 4xyz$
- 39) $x(y - z)^2 - y(z + x)^2 - z(x + y)^2 - x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz$
- 40) $z(x - y)^2 - y(z + x)^2 - x(y + z)^2 + x^3 + y^3 - z^3 + 4xyz$
- 41) $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$
- 42) $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc$
- 43) $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 3abc$
- 44) $bc(b + c) + 2ac(2a + c) + 2ab(2a + b) + 4abc$
- 45) $2bc(2b + c) + ca(c + a) + 2ab(a + 2b) + 4abc$

- 46) $2bc(b + 2c) + 2ca(a + 2c) + ab(a + b) + 4abc$
- 47) $bc(b + c) + 3ca(c + 3a) + 3ab(3a + b) + 6abc$
- 48) $3bc(3b + c) + ca(c + a) + 3ab(a + 3b) + 6abc$
- 49) $3bc(b + 3c) + 3ca(3c + a) + ab(a + b) + 6abc$
- 50) $2ca(c + 2a) + 2ab(a + 2b) + 2bc(b + 2c) + 9abc$
- 51) $2ab(2a + b) + 2bc(2b + c) + 2ac(2c + a) + 9abc$
- 52) $3ab(a + 3b) + 3bc(b + 3c) + 3ca(c + 3a) + 28abc$
- 53) $4ab(a + 4b) + 4bc(b + 4c) + 4ca(c + 4a) + 65abc$
- 54) $5ab(a + 5b) + 5bc(b + 5c) + 5ac(c + 5a) + 126abc$
- 55) $6ab(a + 6b) + 6bc(b + 6c) + 6ca(c + 6a) + 217abc$
- 56) $ab(b - a) + bc(b - c) + ca(c - a) - 2abc$
- 57) $ab(a + b) + bc(c - b) + ca(c - a) - 2abc$
- 58) $bc(b - c) + 2ac(2a - c) - 2ab(2a + b) + 4abc$
- 59) $2ab(a + 2b) - 2bc(2b - c) + ca(c - a) - 4abc$
- 60) $ab(a + b) - 2bc(b - 2c) - 2ca(a - 2c) - 4abc$
- 61) $2ab(a + 2b) + 2bc(2c - b) + 2ca(c - 2a) - 9abc$
- 62) $2ab(a - 2b) + 2bc(b - 2c) + 2ac(c - 2a) + 7abc$
- 63) $3ab(a - 3b) + 3bc(b - 3c) + 3ca(c - 3a) + 26abc$
- 64) $4ab(a - 4b) + 4bc(b - 4c) + 4ca(c - 4a) + 63abc$
- 65) $a^2b + 2ab^2 + 4b^2c + 4bc^2 + 2c^2a + ca^2 + 4abc$
- 66) $2a^2b + ab^2 + b^2c + 2bc^2 + 4c^2a + 4ca^2 + 4abc$
- 67) $4a^2b + 4ab^2 + 2b^2c + bc^2 + 2a^2c + c^2a + 4abc$
- 68) $a^2b + 3ab^2 + 9b^2c + 9bc^2 + ca^2 + 3c^2a + 6abc$
- 69) $3a^2b + ab^2 + b^2c + 3bc^2 + 9ca^2 + 9c^2a + 6abc$

DẠNG $A^3 \pm B^3$

Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- 1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
- 2) $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc$
- 3) $x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz$
- 4) $x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz$
- 5) $x^3 + 8y^3 + 27z^3 - 18xyz$
- 6) $8a^3 + 27b^3 + 64c^3 - 72abc$
- 7) $27a^3 + 64b^3 + 125c^3 - 180abc$
- 8) $125a^3 + 8b^3 + 27c^3 - 90abc$
- 9) $64x^3 + 125y^3 + 216z^3 - 360xyz$
- 10) $64x^3 - 125y^3 + 216z^3 + 360xyz$
- 11) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$
- 12) $(x + y - z)^3 - x^3 - y^3 + z^3$
- 13) $(x - y + z)^3 - x^3 + y^3 - z^3$
- 14) $(x - y - z)^3 - x^3 + y^3 + z^3$
- 15) $(x + 2y + 3z)^3 - x^3 - 8y^3 - 27z^3$
- 16) $(x - 2y + 3z)^3 - x^3 + 8y^3 - 27z^3$
- 17) $(x + 2y - 3z)^3 - x^3 - 8y^3 + 27z^3$
- 18) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$
- 19) $(x - y)^3 + (y + z)^3 - (z + x)^3$
- 20) $(a + b)^3 - (b + c)^3 + (c - a)^3$
- 21) $(z + x)^3 + (y - z)^3 - (x + y)^3$
- 22) $(a^2 + b^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 - (b^2 + c^2)^3$
- 23) $(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3$
- 24) $(a + b - c)^3 - (a + b + c)^3 - (b - c - a)^3 - (a - b - c)^3$
- 25) $(a - b + c)^3 - (a - b - c)^3 - (c - a - b)^3 - (a + b + c)^3$

26) Cho $a + b + c = 3$. Tính $A = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}$

27) Cho $a - b + c = -4$. Tính $B = \frac{a^3 - b^3 + c^3 + 3abc}{(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c - a)^2}$

28) Cho $a + b - c = 6$. Tính $C = \frac{a^3 + b^3 - c^3 + 3abc}{(a - b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2}$

29) Cho $a - b - c = 2$. Tính $D = \frac{a^3 - b^3 - c^3 - 3abc}{(a + b)^2 + (b - c)^2 + (c + a)^2}$

30) Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}{2}$ và $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ khi nào.

31) Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz + zx = \frac{(x - y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2}{2}$ và $x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz + zx = 0$ khi nào.

32) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Tính $E = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right)$

33) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a^3 + b^3 - c^3 = -3abc$.

Tính $F = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{b}{c}\right)\left(1 - \frac{c}{a}\right)$

34) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a^3 - b^3 + c^3 = -3abc$.

Tính $G = \left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right)$

35) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$.

Tính $H = \left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 - \frac{c}{a}\right)$

36) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a^3 + 8b^3 + 27c^3 = 18abc$.

Tính $K = \left(1 + \frac{a}{2b}\right)\left(1 + \frac{2b}{3c}\right)\left(1 + \frac{3c}{a}\right)$

ĐẶT BIẾN PHỤ DẠNG ĐA THỨC

Bài 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- 1) $6x^4 - 11x^2 + 3$
- 2) $x^4 + 3x^2 - 4$
- 3) $3x^4 + 4x^2 + 1$
- 4) $x^4 + x^2 - 20$
- 5) $4x^4 - 37x^2 + 9$
- 6) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$
- 7) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$
- 8) $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 2$
- 9) $(x^2 + x)^2 + 9x^2 + 9x + 14$
- 10) $(x - y)^2 + 4x - 4y - 12$
- 11) $(x^2 + 3x)^2 + 7x^2 + 21x + 10$
- 12) $(x^2 + 5x)^2 + 10x^2 + 50x + 24$

- 13) $(5x^2 - 2x)^2 + 2x - 5x^2 - 6$ 14) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 15$
 15) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$ 16) $x^2 + 8xy + 16y^2 + 2x + 8y - 3$
 17) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 3(x + 3y) - 4$ 18) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 3x - 9y + 2$
 19) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2(x - 2y) - 35$ 20) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 7x + 14y + 6$
 21) $4x^2 + 4xy + y^2 + 10x + 5y - 6$ 22) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$
 23) $(x^2 - x + 3)(x^2 - x - 2) + 4$ 24) $(2x^2 + x - 2)(2x^2 + x - 3) - 12$
 25) $(2x^2 - x - 1)(2x^2 - x - 4) - 10$

ĐẶT BIẾN PHỤ DẠNG $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + e$ (với $a + b = c + d$)**Bài 5:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- 1) $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16$
 2) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$
 3) $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$
 4) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$
 5) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$
 6) $(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7) - 20$
 7) $(x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) - 28$
 8) $x(x - 1)(x + 1)(x + 2) - 3$
 9) $(x + 2)(x + 3)(x - 7)(x - 8) - 144$
 10) $(x - 7)(x - 5)(x - 4)(x - 2) - 72$
 11) $(x^2 + 8x + 12)(x^2 + 12x + 32) + 16$
 12) $(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 8x + 15) - 24$
 13) $(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 6x + 8) - 24$
 14) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 10x + 21) - 20$
 15) $(x^2 + x - 2)(x^2 + 9x + 18) - 28$
 16) $(x^2 + 5x + 6)(x^2 - 15x + 56) - 144$
 17) $(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 7x + 10) - 72$

ĐẶT BIẾN PHỤ DẠNG ĐẲNG CẤP**Bài 6:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- 1) $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2$
 2) $(x^2 - 1)^2 - x(x^2 - 1) - 2x^2$
 3) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$
 4) $4(x^2 + x + 1)^2 + 5x(x^2 + x + 1) + x^2$
 5) $(x^2 - x + 1)^2 - 5x(x^2 - x + 1) + 4x^2$
 6) $(x^2 - x + 2)^4 - 3x^2(x^2 - x + 2)^2 + 2x^4$
 7) $3(-x^2 + 2x + 3)^4 - 26x^2(-x^2 + 2x + 3)^2 - 9x^4$
 8) $-6(-x^2 - x + 1)^4 + x^2(-x^2 - x + 1)^2 + 5x^4$
 9) $(x^2 - x - 1)^4 + 7x^2(x^2 - x - 1)^2 + 12x^4$
 10) $10(x^2 - 2x + 3)^4 - 9x^2(x^2 - 2x + 3)^2 - x^4$

ĐẶT BIẾN PHỤ DẠNG HỒI QUY**Bài 7:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- 1) $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$ 2) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$
 3) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1$ 4) $x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1$

- 5) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6$ 6) $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1$
 7) $x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 14x + 4$ 8) $x^4 - 10x^3 - 15x^2 + 20x + 4$
 9) $2x^4 - 5x^3 - 27x^2 + 25x + 50$ 10) $3x^4 + 6x^3 - 33x^2 - 24x + 48$

ĐẶT BIẾN PHỤ DẠNG $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + ex^2$ (với $ad = bc$)**Bài 8:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- 1) $(x - 3)(x - 5)(x - 6)(x - 10) - 24x^2$
 2) $(x - 1)(x + 2)(x + 3)(x - 6) + 32x^2$
 3) $(x + 1)(x - 4)(x + 2)(x - 8) + 4x^2$
 4) $(x - 2)(x - 3)(x - 6)(x - 4) - 72x^2$
 5) $(x + 3)(x - 1)(x - 5)(x + 15) + 64x^2$
 6) $(x - 2)(x - 4)(x - 5)(x - 10) - 54x^2$
 7) $(x + 2)(x - 4)(x + 6)(x - 12) + 36x^2$
 8) $4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) - 3x^2$
 9) $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) - 4x^2$
 10) $(x - 18)(x - 7)(x + 35)(x + 90) - 67x^2$

DẠNG ĐOÁN NGHIỆM**Bài 9:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- 1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 2) $x^3 - x^2 - 4x + 4$
 3) $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ 4) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$
 5) $-6x^3 + x^2 + 5x - 2$ 6) $3x^3 + 19x^2 + 4x - 12$
 7) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ 8) $2x^3 - 11x^2 + 10x + 8$
 9) $2x^3 + 11x^2 + 3x - 36$ 10) $6x^3 - 17x^2 - 4x + 3$
 11) $x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 8x - 12$ 12) $-3x^4 + 20x^3 - 35x^2 - 10x + 48$
 13) $-2x^4 - 7x^3 - x^2 + 7x + 3$ 14) $x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 17x^2 - 13x + 2$
 15) $x^5 - 5x^4 + 6x^3 - x^2 + 5x - 6$ 16) $3x^3 - 5x^2 + 5x - 2$
 17) $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$ 18) $3x^3 + 5x^2 - x - 2$
 19) $4x^3 + x^2 + x - 3$ 20) $4x^3 - x^2 + x + 3$
 21) $4x^3 - 7x^2 - x + 3$ 22) $6x^3 - 7x^2 + 5x - 2$
 23) $4x^3 - 5x^2 + 6x + 9$ 24) $4x^3 + 5x^2 + 10x - 12$
 25) $5x^3 - 12x^2 + 14x - 4$

ĐẶT BIẾN PHỤ DẠNG KHÁC**Bài 10:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- 1) $(2x + 1)(x + 1)^2(2x + 3) - 18$
 2) $(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) - 35$
 3) $(12x + 7)^2(3x + 2)(2x + 1) - 3$
 4) $(6x + 7)^2(3x + 4)(x + 1) - 6$
 5) $(2x + 1)^2(4x + 1)(4x + 3) - 18$
 6) $(x - 2)^2(2x - 5)(2x - 3) - 5$
 7) $(3x - 2)^2(6x - 5)(6x - 3) - 5$
 8) $(x + 3)^2(3x + 8)(3x + 10) - 8$
 9) $(2x - 1)(x - 1)(x - 3)(2x + 3) + 9$
 10) $(4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) - 4$

- 12) $(2x - 1)(x + 1)(4x + 3)(8x - 6) - 2$
 13) $(2x + 1)(4x - 1)(6x + 2)(12x - 5) - 4$
 14) $(4x + 1)(2x - 3)(4x - 3)(8x + 8) - 130$
 15) $(4x - 2)(10x + 4)(5x + 7)(2x + 1) + 17$

DẠNG HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

Bài 11: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2$ | 2) $(x^2 - x + 6)^2 + (x - 3)^2$ |
| 3) $(x^2 - x + 20)^2 + (x - 5)^2$ | 4) $(x^2 - x + 20)^2 + (x + 4)^2$ |
| 5) $(x^2 - x + 12)^2 + (x - 4)^2$ | 6) $(x^2 - x + 12)^2 + (x + 3)^2$ |
| 7) $(x^2 - x + 30)^2 + (x - 6)^2$ | 8) $(x^2 - x + 30)^2 + (x + 5)^2$ |
| 9) $(x^2 - x + 42)^2 + (x - 7)^2$ | 10) $(x^2 - x + 42)^2 + (x + 6)^2$ |
| 11) $(x^2 - x + 56)^2 + (x - 8)^2$ | 12) $(x^2 - x + 56)^2 + (x + 7)^2$ |
| 13) $x^4 + x^3 - 5x - 3$ | 14) $3x^4 - 5x^3 - 18x^2 - 3x + 5$ |
| 15) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3$ | 16) $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 3$ |
| 17) $3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - x - 2$ | 18) $2x^4 + x^3 + 6x^2 - 2x + 3$ |
| 19) $3x^4 - 5x^3 + x^2 - 2$ | 20) $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 6$ |

Bài 4. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Bài 1: Rút gọn các phân thức

- | | | |
|--------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\frac{20x^2y^2}{15xy^7}$ | 2) $\frac{25x^4y^7}{40x^5y^4}$ | 3) $\frac{-45x^7y^4}{18x^5y^6}$ |
| 4) $\frac{3x^2 - 6xy + 3y^2}{9x^2 - 9y^2}$ | 5) $\frac{15ab + 5b^2}{9a^2 - b^2}$ | 6) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b}$ |
| 7) $\frac{3x^2 - 3y^2}{9x + 9y}$ | 8) $\frac{x^2 - y^2}{ax - ay}$ | 9) $\frac{m^2 - 4m + 4}{2m - 4}$ |
| 10) $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{3x - 3y}$ | | |

Bài 2: Quy đồng mẫu các phân thức sau

- | | | |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1) $\frac{2 - a}{2a}; \frac{1}{2}$ | 2) $\frac{5}{3}; \frac{5a - 6}{3a}$ | 3) $\frac{2x}{3}; \frac{2ax + 3x}{3a}$ |
| 4) $\frac{b}{6a}; \frac{4a + 3b^2}{18ab}; \frac{x}{9b}$ | 5) $\frac{x}{4a}; \frac{6a - 5bx}{20ab}; \frac{a - 1}{10b}$ | 6) $\frac{5}{3}; \frac{5x - 1}{3(x + 1)}$ |
| 7) $\frac{1 - x}{2(x + 1)}; \frac{1}{2}$ | 8) $\frac{7}{5}; \frac{7a - 31}{5a - 15}$ | 9) $\frac{3}{b - 1}; \frac{7 - b}{2b - 2}$ |
| 10) $\frac{2}{3a}; \frac{1}{2a - 2}; \frac{a - 4}{6a^2 - 6a}$ | | |

Bài 3: Tính

- 1) $\frac{1 - a}{5} + \frac{a + 4}{5}$
 4) $\frac{x + 5}{x - 1} + \frac{x - 7}{x - 1}$
 7) $\frac{x - 4}{7} - \frac{8x + 10}{7}$
 10) $\frac{x - 2}{x + 1} - \frac{2x - 1}{x + 1}$
 13) $\frac{x - y}{x + y} - \frac{3x + y}{x + y}$

Bài 4: Tính (rút gọn)

- 1) $\frac{2 - a}{2a} + \frac{1}{2}$
 4) $\frac{2x - 3a}{2a} + \frac{3}{2}$
 6) $\frac{b}{6a} - \frac{4a + 3b^2}{18ab} + \frac{x}{9b}$
 8) $\frac{3}{4x} - \frac{10x + 7y}{12xy} + \frac{5}{6y}$
 10) $\frac{5}{3} - \frac{5x - 1}{3(x + 1)}$
 12) $\frac{1}{2a} - \frac{x^2 - 2ax}{2ax^2} - \frac{2}{x}$
 14) $\frac{3}{b - 1} - \frac{2}{a} - \frac{3a^2 - ab + a}{a^2(b - 1)}$
 16) $\frac{7}{5} - \frac{7a - 31}{5a - 15}$
 18) $\frac{2}{5} - \frac{4a + 13}{10a - 5}$
 20) $\frac{2x}{5} - \frac{7x - 14ax}{5 - 10a}$
 22) $\frac{x}{2} - \frac{2ax - 3x}{4a + 6}$
 24) $\frac{7x - 4ax}{20a - 10} + \frac{x}{5}$
 26) $\frac{x}{5} - \frac{2ax + 4x}{10a - 5}$

- 2) $\frac{3a + 5}{7} + \frac{3 - 2a}{7}$
 5) $\frac{x - 4}{x + 1} + \frac{2x + 7}{x + 1}$
 8) $\frac{x - 5}{3} - \frac{3 + 2x}{3}$
 11) $\frac{a - b}{a + b} - \frac{2a}{a + b}$
 14) $\frac{x - 2y}{x + y} - \frac{2x + y}{x + y}$
 3) $\frac{5x - 6}{3} + \frac{x - 3}{3}$
 6) $\frac{x - 3}{5} - \frac{x + 2}{5}$
 9) $\frac{2x - 5}{x} - \frac{7x - 5}{x}$
 12) $\frac{5x}{5x - 5y} - \frac{y}{x - y}$
 15) $\frac{3x + 5}{x - 1} - \frac{2x + 6}{x - 1}$

- 2) $\frac{5}{3} - \frac{5a - 6}{3a}$
 3) $\frac{2x}{3} - \frac{2ax + 3x}{3a}$
 5) $\frac{5}{3b} + \frac{9b - 25}{15b}$
 7) $\frac{x}{4a} + \frac{6a - 5bx}{20ab} - \frac{a - 1}{10b}$
 9) $\frac{bc - a^2}{ab} + \frac{ac - b^2}{bc} + \frac{ab - c^2}{ca}$
 11) $\frac{1 - x}{2(x + 1)} + \frac{1}{2}$
 13) $\frac{3ab - 2a^2}{a^2b} - \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$
 15) $\frac{2}{3b - 2} - \frac{1}{2} + \frac{6b - 12}{4(3b - 2)}$
 17) $\frac{3}{b - 1} - \frac{7 - b}{2b - 2}$
 19) $\frac{2}{7} - \frac{2a + 15}{7a - 21}$
 21) $\frac{x}{5} - \frac{7x - 14ax}{10 - 20a}$
 23) $\frac{2x}{5} - \frac{7x - 4ax}{5 - 10a}$
 25) $\frac{x - 1}{3} - \frac{ax - 5x - a - 1}{3a + 3}$
 27) $\frac{3x}{5} - \frac{9ax - 13x}{15a - 5}$

$$28) \frac{2}{3a} + \frac{1}{2a-2} - \frac{a-4}{6a^2-6a}$$

$$30) \frac{x}{2a-b} - \frac{4ax}{4a^2-b^2} + \frac{b}{2a+b}$$

$$32) \frac{x}{a-2} + \frac{5a-4}{3a^2-6a} - \frac{2}{3a}$$

$$34) \frac{a}{9a-18} - \frac{b-1}{6b} - \frac{ab-3a+6}{9ab-18b}$$

$$36) \frac{-1}{3} + \frac{x}{a-2} + \frac{a+3x-2}{3a-6}$$

$$38) \frac{2x}{y} + \frac{y^2-6x^2-6x}{3xy+3y} + \frac{x}{3x+3}$$

$$40) \frac{x}{10x-10} - \frac{9x-11}{30x^2-30} + \frac{1}{3x+3}$$

Bài 5: Tính (rút gọn)

$$1) \frac{1}{5-2b} + \frac{2b-2}{6b-15}$$

$$3) \frac{14b+19}{10b-15} + \frac{8}{3-2b}$$

$$5) \frac{8x+5}{3-b} + \frac{5bx+3b+x+1}{2b-6}$$

$$7) \frac{2x-1}{a-b} + \frac{2bx-2ax+6x-3}{3b-3a}$$

$$9) \frac{a+2b-2x}{ab-xa} + \frac{1}{x-b}$$

$$11) \frac{3a-1}{a^2-1} + \frac{1}{1-a}$$

$$13) \frac{2a+9}{9-4a^2} + \frac{-1}{2a+3}$$

$$15) \frac{a}{1-a} + \frac{a^2+ab+a-1}{a^2-b+ab-a}$$

$$17) \frac{1}{a+1} + \frac{2}{1-a} + \frac{5a-1}{a^2-1}$$

$$19) \frac{1}{1-a} + \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{a^3+2a}{a^3-1}$$

$$29) \frac{5x-1}{3} - \frac{10ax-6a-16x+15}{6a-15}$$

$$31) \frac{x}{2a-b} - \frac{1}{6a} - \frac{11a-2}{12a^2-12a}$$

$$33) \frac{1}{a-1} + \frac{3a+ax-x}{3a^2-3a} - \frac{x}{3a}$$

$$35) \frac{x}{a-2} + \frac{2x-ax-a}{2a-a^2} - \frac{x}{a}$$

$$37) \frac{3x}{2} + \frac{2y-9x^2+9x}{6x-6} + \frac{x}{3x-3}$$

$$39) \frac{2x}{y^2} + \frac{3x-x^2-y}{3y^2-y^2x} + \frac{1}{3y-xy}$$

$$41) \frac{5}{6x} - \frac{2xy-x-2y}{42x^2+84xy} + \frac{y}{21x+42y}$$

$$2) \frac{2}{2-b} + \frac{2b+2}{3b-6}$$

$$4) \frac{5b+1}{2b-6} + \frac{8}{3-b}$$

$$6) \frac{5b-5a+24}{3b-3a} + \frac{8}{a-b}$$

$$8) \frac{bx-x+a}{ba-a} + \frac{1}{1-b}$$

$$10) \frac{x}{2y^2-xy} + \frac{4y}{x^2-2xy}$$

$$12) \frac{a^2+2a}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1}$$

$$14) \frac{ax+2x-1}{ax-a+x-1} + \frac{x}{1-x}$$

$$16) \frac{a^2-b^2-2a+b}{a-2+2b-ab} + \frac{a}{b-1}$$

$$18) \frac{1}{x-2a} + \frac{8a^2}{4a^2x-x^3} + \frac{1}{x+2a}$$

$$20) \frac{x}{a+b} + \frac{1}{b-a} + \frac{ax-bx+a+b}{a^2-b^2}$$

$$21) \frac{1}{9x-18} + \frac{16-7x}{72-18x} + \frac{5}{12x+24}$$

$$22) \frac{4a^2-3a+17}{a^3-1} + \frac{2a-1}{a^2+a+1} + \frac{6}{1-a}$$

Bài 6: Tính (rút gọn)

$$1) \frac{5by}{12ax} \cdot \frac{2x}{5y}$$

$$3) \frac{5x}{42y^2} \cdot \frac{7y}{x}$$

$$5) \frac{-25x^4y^3}{14a^2} : \left(\frac{10x^3y^2}{-21ab} \right)$$

$$7) \frac{-25a^3b^5}{3cd^2} : (15ab^2)$$

$$9) \frac{5ab-6b}{9a^2-6ab} \cdot \frac{2b-3a}{b}$$

$$11) \frac{4a^2-9b^2}{a^2b^2} : \frac{2ax+3bx}{2ab}$$

$$13) \frac{2x^2+2xy}{3y-3x} \cdot \frac{y-x}{y+x}$$

$$15) \frac{2x-2y}{8-b^3} \cdot \frac{4+2b+b^2}{x-y}$$

$$17) \frac{3a+3b}{b^3-1} : \frac{a+b}{b^2+b+1}$$

$$19) \frac{2a-2}{3-2b+3a-2ab} : \frac{1}{4a+4}$$

Bài 7: Tính (rút gọn)

$$1) \frac{2x^2}{3y^2} \cdot \frac{y^2}{x} - \frac{2ax+3x}{3a}$$

$$3) \frac{5a}{3a+9} \cdot \frac{a+3}{a} - \frac{5a-6}{3a}$$

$$5) \frac{5a+5b}{3ab^2} \cdot \frac{ab}{a+b} + \frac{9b-25}{15b}$$

$$7) \frac{2b+2}{2b-b^2} : \frac{b+1}{b} + \frac{2b+2}{3b-6}$$

$$2) \frac{3x^3}{4aby} \cdot \frac{by}{3x^2}$$

$$4) \frac{18a^2b^2}{15cd} : \frac{9a^3b^2}{5c^2d^2}$$

$$6) 3a^3b^4 : \left(\frac{9ab^5}{-7cd^3} \right)$$

$$8) \frac{2x-ax}{2ay+4a} \cdot \frac{y+2}{x}$$

$$10) \frac{x^2-y^2}{6x^2y} \cdot \frac{3xy}{x+y}$$

$$12) \frac{5a-5}{(a+1)^2} : \frac{20-20a^2}{3+3a}$$

$$14) \frac{4x^2-9a^2}{6ax+2a} \cdot \frac{3x+1}{2x+3a}$$

$$16) \frac{9ab-25a}{15b^2-15ab} : \frac{a}{b-a}$$

$$18) \frac{2x}{25-4b^2} : \frac{1}{2,5+b}$$

$$20) \frac{25b^2-1}{ab-3a+3b-9} : \frac{10b-2}{a+3}$$

$$2) \frac{2-a}{2a} + \frac{1}{2a-2} \cdot \frac{a-1}{x}$$

$$4) \frac{2x-3a}{2a} + \frac{3a-3x}{4ax} \cdot \frac{2ax}{a-x}$$

$$6) \frac{y}{5ax-2abx} \cdot \frac{ax}{y} + \frac{2b-2}{6b-15}$$

$$8) \frac{14b+19}{10b-15} + \frac{4a+4b}{3a-2ab} : \frac{a+b}{2a}$$

$$9) \frac{5b+1}{2b-6} + \frac{2b+2}{9-b^2} : \frac{b+1}{12+4b}$$

$$10) \frac{a^2+2b^2}{2a} + \frac{ax+bx}{5a-5b} : \frac{a^2-10ab+5b^2}{5a^2-10ab+5b^2}$$

$$28) \left(x + \frac{3}{x+4}\right) \left(x+1 - \frac{9}{x+1}\right) : \left(x-1 - \frac{4}{x+2}\right)$$

$$29) \left(x+2 + \frac{4}{x-3}\right) \left(x+1 - \frac{4}{x-2}\right) : \left(x+4 + \frac{6}{x-1}\right)$$

$$30) \left(x-5 + \frac{7}{x+3}\right) : \left(x - \frac{24}{x-2}\right) \left(x+5 + \frac{2}{x+2}\right)$$

Bài 8: Tính (rút gọn)

$$1) \left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{6x}{x^2-1}$$

$$3) \left(2 - \frac{3}{x}\right) \frac{x^2}{4x^2-9}$$

$$5) \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right) \frac{6x}{x+3}$$

$$7) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}\right)$$

$$9) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x}\right) \left(\frac{4}{x+4} + \frac{3}{x-3}\right)$$

$$11) \left(x + \frac{6}{x+5}\right) \left(x - \frac{15}{x+2}\right)$$

$$13) \left(x - \frac{28}{x-3}\right) \left(x - \frac{21}{x+4}\right)$$

$$15) \left(2x-8 - \frac{x+10}{3x+1}\right) \left(x-6 - \frac{x-6}{3x+2}\right)$$

$$16) \left(2x-4 - \frac{x-12}{3x+4}\right) \left(3x-2 - \frac{10}{2x+1}\right)$$

$$17) \left(1 + \frac{1}{x}\right) : \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$19) \left(3 + \frac{1}{x}\right) : \left(9 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$21) \left(1 - \frac{8}{x^3}\right) : \left(1 - \frac{2}{x}\right)$$

$$23) \left(x+1 - \frac{5}{x-3}\right) : \left(x - \frac{4}{x-3}\right)$$

$$25) \left(2x + \frac{x-1}{2x+1}\right) : \left(2x - \frac{x+3}{2x+1}\right)$$

$$26) \left(\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2}\right) : \left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}\right)$$

$$27) \left(\frac{2x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1}\right) : \left(\frac{2x-1}{2x+1} + \frac{2x+1}{2x-1}\right)$$

$$2) \left(3 + \frac{1}{x}\right) \frac{9}{9x^2-1}$$

$$4) \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) \frac{4x}{x^2-4}$$

$$6) \left(6 + \frac{30}{x}\right) \frac{x}{x^2-25}$$

$$8) \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{2x+1}\right)$$

$$10) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2x}\right) \left(\frac{1}{x+2} - \frac{4}{4x-3}\right)$$

$$12) \left(x - \frac{3}{x+2}\right) \left(x + \frac{2}{x+3}\right)$$

$$14) \left(x+3 - \frac{1}{x+3}\right) \left(x + \frac{3}{x+4}\right)$$

$$18) \left(1 - \frac{4}{x}\right) : \left(1 - \frac{6}{x^2}\right)$$

$$20) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) : \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$22) \left(x+1 - \frac{4}{x-2}\right) : \left(x - \frac{3}{x-2}\right)$$

$$24) \left(x + \frac{3}{x+4}\right) : \left(x-5 + \frac{18}{x+4}\right)$$

Bài 9: Rút gọn

$$1) \left(a - \frac{a^2+b^2}{a+b}\right) \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a-b}\right)$$

$$2) \frac{2}{ab} : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$$

$$3) \left(\frac{a^3+b^3}{a+b} - ab\right) \frac{a+b}{a^2-b^2} + \frac{1}{2}(2b-2a+4) \quad 4) \frac{(a-b)^2+4ab}{a+b} - \frac{a^2b+ab^2}{ab}$$

$$5) \frac{a-b}{ab+b^2} + \frac{3a+b}{a^2-ab} \cdot \frac{a-b}{a+b} \quad 6) \left(m - \frac{m^2+n^2}{m+n}\right) \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{m-n}\right)$$

$$7) \left(1 + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \left(\frac{x}{y} - 1\right) \frac{y^2}{x^3-y^3}$$

$$8) \left(x - \frac{4xy}{x+y} + y\right) : \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} - \frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$$

$$9) \left(\frac{a}{ab-b^2} - \frac{2a-b}{a^2-ab}\right) : \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2b-ab^2}$$

$$10) \left(\frac{3}{x-y} + \frac{3x}{x^3-y^3} \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right) \frac{x^2+2xy+y^2}{2x+y}$$

$$11) \frac{2(x^2-y^2)}{x+y} + \frac{2(x^2+2xy+y^2)}{x+y} + \left(\frac{x+y}{x-y} : \frac{x^2+xy}{3x^2-3y^2}\right)$$

$$12) \left(\frac{x}{xy-y^2} - \frac{y}{x^2-xy}\right) \frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}$$

$$13) \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{(a+b)}{a-b}\right) \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1\right)$$

$$14) \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{x+y} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right] : \frac{x^2+y^2-2xy}{xy}$$

$$15) \left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right) \left(\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{a-b}\right)$$

Bài 10: Thực hiện phép chia sau

- 1) $(x^3 + 5x^2 + 11x + 10) : (x + 2)$
- 3) $(x^3 + 4x^2 + 8x + 5) : (x + 1)$
- 5) $(x^4 - 11x^2 - 36x - 35) : (x^2 + 3x + 5)$
- 7) $(3x^4 - x^2 + 1) : (x - 4)$
- 9) $(x^6 + x^4 - x) : (x - 1)$
- 11) $(x^5 + 1) : (x + 1)$
- 13) $(x^6 + 1) : (x + 1)$
- 15) $(2x^4 - x + 6) : (x - 5)$
- 2) $(x^3 - 2x^2 - 10 - 7) : (x^2 - 7 - 3x)$
- 4) $(x^3 - x^2 - 13x - 14) : (x^2 - 3x - 7)$
- 6) $(x^3 + 6x^2 + 5x) : (x + 5)$
- 8) $(x^5 - 1) : (x - 1)$
- 10) $(x^6 + 3x^3 - 2x - 1) : (x - 2)$
- 12) $(x^6 - 1) : (x - 1)$
- 14) $(x^4 + 2x^2 - 3x + 5) : (x - 3)$

Bài 11: Tìm số dư trong phép chia

- 1) $(x^2 + 5x + a) : (x + 1)$
- 3) $(-3x^2 - x + a) : (x - 4)$
- 5) $(x^2 + ax + b) : (x - 1)$
- 7) $(3x^2 + mx + 5) : (x + 2)$
- 2) $(2x^2 + 3x + a) : (x + 2)$
- 4) $(2x^2 - 5x + a) : (2x + 1)$
- 6) $(2x^2 + mx - n) : (2x + 4)$
- 8) $(x^2 - 4x + m) : (x - 5)$

Bài 12: Tìm các giá trị nguyên của x để các phân thức sau có giá trị nguyên

- 1) $\frac{28}{x}$
- 5) $\frac{x^3 - x^2 + 2}{x - 2}$
- 9) $\frac{x + 3}{x^2 + x + 1}$
- 2) $\frac{3}{x - 1}$
- 6) $\frac{x^3 - 3x^2 + 5}{x + 2}$
- 10) $\frac{x + 7}{x^2 + x + 3}$
- 3) $\frac{4}{x + 1}$
- 7) $\frac{x - 1}{x^2 - 5x + 7}$
- 4) $\frac{5}{2x + 1}$
- 8) $\frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2}$

Bài 5. PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1: Giải các phương trình sau:

- 1) $x + 5 = 7$
- 3) $3 = x - 2$
- 5) $2x = 7 + x$
- 7) $3x + 1 = 5x + 2$
- 9) $2(x - 3)12$
- 11) $x - (8 - x) = 4$
- 13) $2[x - (2x + 1)] = 6$
- 15) $-2[x + 3(x - 1)] = 4 + x$
- 17) $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 4$
- 19) $(x + 3)^2 = x^2 + 4x$
- 21) $x - (x + 2)(x - 3) = 4 - x^2$
- 23) $\frac{3x}{4} = 6$
- 25) $\frac{3}{5}x = -12$
- 27) $7 + \frac{5x}{3} = x - 2$
- 29) $1 + \frac{x}{9} = \frac{4}{3}$
- 2) $x - 2 = 8$
- 4) $7 = x + 4$
- 6) $x - 6 = 2x$
- 8) $4x - 3 = 2x + 2$
- 10) $3(x + 4) = 6$
- 12) $3x - (3 + x) = 0$
- 14) $4[2x + (3x - 1)]$
- 16) $-5[2x - 2(x + 1)] = 6 - x$
- 18) $(2x - 3)(x + 2) = x + 4 + 2x^2$
- 20) $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 8$
- 22) $3x - (x - 3)(x + 1) = 6x - x^2$
- 24) $\frac{2x}{3} = 8$
- 26) $\frac{7}{2}x = -8$
- 28) $x + 4 = \frac{2}{5}x - 3$
- 30) $4 + \frac{x}{5} = \frac{5}{3}$

31) $\frac{x}{5} - \frac{x}{2} = 9$

33) $\frac{2x - 1}{5} - \frac{x + 1}{2} = 0$

35) $\frac{3}{2} = 6 - \frac{x + 10}{x - 3}$

37) $\frac{2}{x - 9} = \frac{9}{x + 12}$

39) $\frac{5}{x - 3} = \frac{x + 2}{x - 3} + 3$

41) $\frac{y}{y + 2} - \frac{3}{y - 2} = \frac{y^2 + 8}{y^2 - 4}$

32) $\frac{x}{4} = 2 - \frac{x}{3}$

34) $\frac{2x}{3} - \frac{2x + 5}{6} = \frac{1}{2}$

36) $\frac{x}{x - 2} = \frac{2}{x - 2} + 7$

38) $\frac{2}{y + 1} + \frac{1}{3y + 3} = \frac{1}{6}$

40) $\frac{4}{2x - 3} + \frac{4x}{4x^2 - 9} = \frac{1}{2x + 3}$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

- 1) $(x - 5)^2 + (x + 3)^2 = 2(x - 4)(x + 4) - 5x + 7$
- 2) $(x + 3)(x - 2) - 2(x + 1)^2 = (x - 3)^2 - 2x^2 + 4x$
- 3) $(x + 1)^3 - (x + 2)(x - 4) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 2x^2$
- 4) $(x - 2)^3 + (x - 5)(x + 5) = x(x^2 - 5x) - 7x + 3$
- 5) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - x(x - 4)^2 = 8(x - 3)(x + 3)$
- 6) $4(x - 1)(x + 2) - 5(x + 7) = (2x + 3)^2 - 5x + 3$
- 7) $(x - 1)(x^2 + x + 1) + 3(x - 2)^2 = x(x^2 + 3x - 1)$
- 8) $(x + 5)(x - 5) - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 5 - x(x^2 - x - 2)$
- 9) $(x + 2)^2 - 2(x + 3)(x - 4) = 5 - x(x - 3)$
- 10) $(x + 7)(x - 7) - (x + 2)^2 = 5(x - 2) + (x - 7)$

Bài 3: Giải các phương trình ẩn x sau:

- 1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2}$
- 3) $\frac{2}{3x} - \frac{1}{2x} = \frac{3}{4}$
- 5) $\frac{3}{8x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{x^2}$
- 7) $\frac{1}{2x} + \frac{3}{4x} = \frac{5}{2x^2}$
- 9) $\frac{5}{x + 2} = 3$
- 11) $\frac{2a}{x + a} = 1$
- 13) $\frac{7}{3x - 2} = 4$
- 2) $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{4}$
- 4) $\frac{1}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{1}{5}$
- 6) $\frac{1}{3x} - \frac{1}{4x} = \frac{1}{x^2}$
- 8) $\frac{2}{3x} - \frac{1}{2x} = \frac{3}{4x^2}$
- 10) $\frac{2}{x - 1} = 1$
- 12) $\frac{3a}{x - a} = 4$
- 14) $\frac{x}{x + 5} = 2$

$$\begin{aligned}
 15) \frac{3x}{5x-1} &= 2 \\
 17) \frac{3x}{4x-3} &= -2 \\
 19) \frac{4}{x+1} &= \frac{3}{x-2} \\
 21) \frac{5}{3x-2} - \frac{1}{x-4} &= 0 \\
 23) \frac{4}{2x-3} - \frac{7}{3x-5} &= 0 \\
 25) \frac{7}{2x-3} + \frac{1}{2x-2} &= \frac{3}{x-1} \\
 27) \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} &= \frac{1}{3x+3} \\
 29) \frac{2}{x-1} + \frac{4}{x+3} &= \frac{3x+11}{x^2+2x-3} \\
 31) \frac{7}{x+2} + \frac{2}{x+3} &= \frac{1}{x^2+5x+6} \\
 33) \frac{x}{x+2} - \frac{x^2+1}{x^2-2x-8} &= \frac{3}{x-4} \\
 35) \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+2} &= \frac{5x+4}{x^2+3x+2} \\
 37) \frac{9}{3x-1} - \frac{5-x}{3x^2-4x+1} &= \frac{4}{x-1} \\
 39) \frac{4}{x+6} + \frac{1}{x-3} &= \frac{9}{x^2+3x-18} \\
 41) \frac{2}{x+6} + \frac{1}{x+1} &= \frac{3x+8}{x^2+7x+6} \\
 43) \frac{3}{2x-1} + \frac{1}{x+4} &= \frac{5x+11}{2x^2+7x-4} \\
 45) \frac{2}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} &= \frac{1}{x^2-3x+2} \\
 46) \frac{3}{x^2+x-2} + \frac{2}{x^2-4} &= \frac{1}{x^2-3x+2} \\
 47) \frac{x}{x^2-1} + \frac{3}{x^2-2x-3} &= \frac{x}{x^2-4x+3} \\
 16) \frac{2x}{3x+2} &= -3 \\
 18) \frac{2}{x-3} &= \frac{1}{x+2} \\
 20) \frac{3}{x+4} &= \frac{2}{2x+1} \\
 22) \frac{7}{3x-4} - \frac{3}{3x-3} &= 0 \\
 24) \frac{2a}{2x-3a} - 1 &= 0 \\
 26) \frac{1}{2x-1} + \frac{3}{12x-8} &= \frac{2}{3x-2} \\
 28) \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x-2} &= \frac{5}{2x+6} \\
 30) \frac{6}{x+3} - \frac{1}{x-2} &= \frac{5}{2x+6} \\
 32) \frac{4}{x-2} + \frac{x}{x+1} &= \frac{x^2-2}{x^2-x-2} \\
 34) \frac{x}{2x+1} - \frac{2}{x-3} &= \frac{x^2+5}{2x^2-5x-3} \\
 36) \frac{2}{3x+1} - \frac{15}{6x^2-x-1} &= \frac{3}{2x-1} \\
 38) \frac{5}{x-2} + \frac{2}{x+4} &= \frac{3x}{x^2+2x-8} \\
 40) \frac{x}{x-3} - \frac{2x^2+9}{2x^2-3x-9} &= \frac{1}{2x+3} \\
 42) \frac{x}{2x-3} + \frac{1}{x-3} &= \frac{x^2-x-3}{2x^2-9x+9} \\
 44) \frac{3}{x+2} - \frac{2x-20}{3x^2+4x-4} &= \frac{7}{3x-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 48) \frac{2}{x^2-x-6} + \frac{x+1}{x^2+x-12} &= \frac{x}{x^2+6x+8} \\
 49) \frac{x-1}{2x^2-3x-2} - \frac{x}{2x^2+7x+3} &= \frac{4}{x^2+x-6} \\
 50) \frac{x+1}{2x^2+7x-4} - \frac{x}{2x^2-7x+3} &= \frac{1}{x^2+x-12} \\
 51) \frac{3x}{6x^2-7x-3} - \frac{x-2}{2x^2-5x+3} &= \frac{3}{3x^2-2x-1} \\
 52) \frac{2x}{6x^2+7x-3} - \frac{x-3}{3x^2+11x-4} &= \frac{5}{2x^2+11x+12} \\
 53) \frac{3x-2}{x^2-12x+20} - \frac{4x+3}{x^2+6x-16} &= \frac{7x+11}{x^2-2x-80} \\
 54) \frac{2x-5}{x^2+5x-36} - \frac{x-6}{x^2+3x-28} &= \frac{x+8}{x^2+16x+63} \\
 55) \frac{2x-1}{x^2+4x-5} + \frac{x-2}{x^2-10x+9} &= \frac{3x-12}{x^2-4x-45} \\
 56) \frac{3x-1}{18x^2+3x-28} - \frac{4x}{24x^2+23x-12} &= \frac{3}{48x^2-74x+21} \\
 57) \frac{x-2}{4x^2-29x+30} - \frac{x+1}{20x^2-13x-15} &= \frac{x+2}{5x^2-274x+18} \\
 58) \frac{x+8}{x^2+x-6} + \frac{x-8}{x^2-x-2} &= \frac{2x+8}{x^2+4x+3} \\
 59) \frac{3x-1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-3x+2} &= \frac{3x-3}{x^2-x-2} \\
 60) \frac{2x+3}{x^2+3x+2} + \frac{6}{x^2-x-6} &= \frac{2x-2}{x^2-2x-3}
 \end{aligned}$$

Bài 6. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Bài 1: Giải các phương trình sau

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 1) $(x-1)(3x-6) = 0$ | 2) $(2x+5)(1-3x) = 0$ |
| 3) $(x+1)(2x-3)(3x-5) = 0$ | 4) $6(x-2)(x-4)(1-7x) = 0$ |
| 5) $(x+1)^2(x+2) = 0$ | 6) $(3x-2)^2(x+1)(x-2) = 0$ |
| 7) $(5-x)^2(3x-1) = 0$ | 8) $(14-2x)^2(3-x)(2x-4) = 0$ |
| 9) $(5x-6)^2(x+2)(x+10) = 0$ | 10) $(3x-3)^3(x+4) = 0$ |

11) $(2x-1)^3(4x+5)=0$

13) $(9x+6)^3(3x-4)^2(1-7x)=0$

15) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3(3x-2)^2=0$

12) $(8-x)^3(3x+6)=0$

14) $(4x-8)^2(2x+6)^3=0$

16) $\left(\frac{5}{4}x-\frac{15}{16}\right)(5x+1)^2=0$

Bài 2: Giải các phương trình sau

1) $(2x+5)(x-4)=(x-4)(5-x)$

3) $-5(4x-1)(x-2)=2(4x-1)^2$

4) $(x+6)(5-x)=-2(5-x)(7x+8)$

5) $(2x-1)(5x-7)=(2x-1)(9-7x)$

6) $(x-2)(7-3x)=(3x-7)(8x+32)$

7) $(2-x)(x+1)=(x-2)(3x+5)$

8) $(x-1)(x+7)=(1-x)(3-2x)$

9) $(6x-7)(3x+4)=(7-6x)(x-1)$

10) $(2x-3)(5x+1)=(3-2x)(x-5)$

11) $(3x-2)(x+1)=x^2-1$

13) $(x+3)(2x+3)=4x^2-9$

15) $(x-2)(7x+3)=49x^2-9$

16) $(9x^2-4)(x+1)=(3x+2)(x^2-1)$

17) $(x^2-4)(4x-1)=(x-2)(16x^2-1)$

18) $(x-1)^2+x^2-1=(x-1)(x+3)$

19) $(2x-3)^2+4x^2-9=(2x-3)(3x+5)$

20) $x^2-6x+9+(x-3)(x+3)=(x-3)(2x-1)$

21) $(4x+3)(4x-3)+16x^2+24x+9=(4x+3)(5x-3)$

22) $(2x-1)(x+7)+4x^2-4x+1=(2x-1)(5x-3)$

23) $(x-3)^2-9+x^2=(x-3)(x+1)$

24) $(2x+5)^2-25+4x^2=(2x+5)(5-9x)$

25) $(4-3x)^2+9x^2-16=(3x-4)(x+1)$

26) $(7+6x)^2-49+36x^2=(7+6x)(x-6)$

2) $2(3x+1)^2=(3x+1)(x-2)$

12) $9x^2-4-(3x+2)(x-1)=0$

14) $16x^2-25=(4x-5)(2x+1)$

Bài 3: Giải các phương trình sau

1) $x^2=1$

4) $x^2=4$

7) $(-x)^2=7$

10) $(-x)^2=10$

13) $x^2=13$

16) $x^2=16$

19) $x^2=49$

22) $x^2=100$

25) $x^2=169$

28) $x^2=256$

31) $x^3=27$

2) $x^2=2$

5) $x^2=5$

8) $(-x)^2=8$

11) $x^2=-11$

14) $x^2=14$

17) $x^2=25$

20) $x^2=64$

23) $x^2=121$

26) $x^2=196$

29) $x^3=1$

32) $x^3=64$

3) $x^2=3$

6) $(-x)^2=6$

9) $(-x)^2=9$

12) $x^2=12$

15) $(-x)^2=-15$

18) $x^2=36$

21) $x^2=81$

24) $x^2=144$

27) $x^2=225$

30) $x^3=8$

33) $x^3=125$

34) $x^3=-1$

37) $(-x)^3=-64$

40) $(-x)^3=-343$

43) $(2x+7)^2=1$

46) $(5x-7)^2=4$

49) $(26x+9)^2=100$

52) $(1-2x)^3=8$

55) $(6x-7)^3=125$

58) $(9x-10)^3=-27$

61) $(x-1)^2=2$

64) $(4x-6)^2=7$

67) $(7x-7)^2=3$

70) $(7x+2)^2=7$

73) $-3x^2=-48$

76) $-6x^2=-216$

79) $\frac{2}{3}x^2=\frac{8}{3}$

82) $-\frac{1}{3}x^2=-3$

85) $-5x^2=-10$

88) $-\frac{1}{3}x^2=-2$

91) $2x^2=\frac{1}{2}$

94) $4x^2=\frac{1}{4}$

97) $7x^2=\frac{7}{36}$

100) $20x^2=\frac{1}{5}$

103) $4(1-3x)^2=4$

105) $16(9x-11)^2=256$

107) $\frac{1}{2}(5x+4)^2=\frac{1}{8}$

109) $\frac{4}{9}(9-7x)^2=4$

111) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

113) $\left(-x+\frac{2}{3}\right)^2=1$

35) $x^3=-8$

38) $(-x)^3=-125$

41) $(2x-1)^2=49$

44) $(6-4x)^2=16$

47) $(10x-7)^2=64$

50) $(15-37x)^2=1$

53) $(3x-4)^3=27$

56) $(7-5x)^3=-1$

59) $(11x-12)^3=-125$

62) $(2x-3)^2=5$

65) $(x-2)^2=10$

68) $(9x+10)^2=10$

71) $2x^2=8$

74) $4x^2=-16$

77) $7x^2=-7$

80) $-\frac{4}{5}x^2=-\frac{1}{5}$

83) $2x^2=6$

86) $4x^2=20$

89) $\frac{2}{7}x^2=\frac{28}{14}$

92) $-3x^2=-\frac{1}{3}$

95) $5x^2=\frac{1}{5}$

98) $8x^2=\frac{1}{8}$

101) $2(x+1)^2=8$

104) $-2(2x+7)^2=2$

106) $-4(5-7x)^2=-100$

108) $-\frac{2}{3}(4x-6)^2=-24$

110) $-\frac{5}{7}(7x+18)^2=-\frac{125}{7}$

112) $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2=\frac{64}{9}$

114) $\left(2x+\frac{4}{5}\right)^2=\frac{1}{16}$

36) $x^3=-27$

39) $(-x)^3=216$

42) $(3x+4)^2=25$

45) $(7x-5)^2=36$

48) $(13-25x)^2=81$

51) $(x+1)^3=1$

54) $(4x-3)^3=64$

57) $(6-4x)^3=-8$

60) $(6-12x)^3=-216$

63) $(x+4)^2=6$

66) $(5x+1)^2=2$

69) $(6x-7)^2=5$

72) $2x^2=18$

75) $5x^2=125$

78) $-2x^2=-128$

81) $\frac{1}{2}x^2=32$

84) $-3x^2=6$

87) $\frac{1}{2}x^2=4$

90) $-\frac{3}{8}x^2=\frac{6}{32}$

93) $4x^2=-1$

96) $-6x^2=-\frac{6}{49}$

99) $9x^2=\frac{1}{9}$

102) $-3(2x-5)^2=-27$

$$115) \left(-3x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$117) \left(-4x - \frac{8}{9}\right)^2 = \frac{4}{49}$$

$$119) \left(9x + \frac{1}{9}\right)^2 = \frac{81}{64}$$

$$121) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$123) 3 \left(\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$125) -\frac{4}{5} \left(4x + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64}{5}$$

$$127) -\frac{8}{7} \left(\frac{7}{2}x + \frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{8}{175}$$

$$129) -\frac{3}{4} \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{7}\right)^2 = -\frac{27}{64}$$

$$131) -\frac{11}{12} \left(\frac{13}{3} - \frac{25}{6}x\right)^2 = -\frac{33}{49}$$

$$133) 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right)^3 = \frac{1}{9}$$

$$135) -4 \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}x\right)^3 = \frac{1}{16}$$

$$137) \frac{9}{5} \left(-\frac{4}{3}x + \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{25}{3}$$

$$139) 7 \left(\frac{3}{14}x - \frac{2}{7}\right)^3 = -\frac{1}{49}$$

Bài 4: Giải các phương trình sau

$$1) (2x + 7)^2 = (x + 3)^2$$

$$3) (13x - 7)^2 = (7x + 9)^2$$

$$5) (27x + 9)^2 = (24x - 7)^2$$

$$7) (3 - x)^2 = (x + 3)^2$$

$$116) \left(7x - \frac{2}{3}\right)^2 = 4$$

$$118) \left(\frac{6}{7} - 2x\right)^2 = \frac{100}{81}$$

$$120) \left(11x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{36}{121}$$

$$122) -\frac{2}{3} \left(\frac{4}{5} - \frac{6}{7}x\right)^2 = -\frac{3}{2}$$

$$124) -\frac{4}{5} \left(\frac{5}{2} - 2x\right)^2 = -\frac{16}{125}$$

$$126) \frac{11}{6} \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3}x\right)^2 = \frac{33}{8}$$

$$128) \frac{1}{9} \left(-\frac{3}{2}x + \frac{1}{10}\right)^2 = \frac{9}{100}$$

$$130) \frac{15}{13} \left(3 - \frac{8}{9}x\right)^2 = \frac{375}{52}$$

$$132) \frac{7}{13} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}x\right)^2 = 91$$

$$134) -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{16}$$

$$136) \frac{3}{2} \left(\frac{5}{6}x - \frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{4}{9}$$

$$138) -\frac{25}{6} \left(\frac{1}{5} - \frac{7}{10}x\right)^3 = \frac{36}{5}$$

$$140) \frac{8}{81} \left(-\frac{5}{16} - \frac{3}{8}x\right)^3 = \frac{9}{64}$$

$$2) (4x + 14)^2 = (7x + 21)^2$$

$$4) (6 - 9x)^2 = (5x - 7)^2$$

$$6) (-5x - 1)^2 = (x - 2)^2$$

$$8) (4x - 6)^2 = (6 + 4x)^2$$

$$9) (1 + x)^2 = (x - 1)^2$$

$$11) (5x - 4)^2 = (4 - 5x)^2$$

$$13) (-x - 3)^2 = (x + 3)^2$$

$$15) (3x + 1)^2 - 4(x - 3)^2 = 0$$

$$17) 25(3x + 7)^2 = 16(1 - x)^2$$

$$19) 36(4x + 1)^2 = (3x + 2)^2$$

$$10) \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - 2x\right)^2$$

$$12) \left(\frac{9}{5} - 2x\right)^2 = \left(2x - \frac{9}{5}\right)^2$$

$$14) \left(7x + \frac{1}{8}\right)^2 = \left(-7x - \frac{1}{8}\right)^2$$

$$16) 9(x - 1)^2 - 4(2x + 1)^2 = 0$$

$$18) 49\left(x + \frac{1}{7}\right)^2 = 81\left(\frac{1}{9}x - 2\right)^2$$

$$20) 64(1 - 5x)^2 = 9\left(\frac{2}{3} + 4x\right)^2$$

Bài 5: Giải các phương trình sau

$$1) 8x^2 - 4x = 0$$

$$4) -6x + 9x^2 = 0$$

$$7) 2x^2 = x$$

$$10) 4x^2 = 3x$$

$$13) -x^2 = 4x^3$$

$$16) 27x^2 - 54x^3 = 0$$

$$19) 5x^4 + 20x^3 = 0$$

$$22) 2x^3 - 50x = 0$$

$$25) x^3 - \frac{1}{4}x = 0$$

$$28) -x^3 + \frac{1}{36}x = 0$$

$$31) x^3 + x = 0$$

$$34) 5x^3 + 4x = 0$$

$$37) x^3 + 2x = 0$$

$$40) -4x^4 - 3x^2 = 0$$

$$43) 3x^3 - 5x = 0$$

$$2) 2x^2 - 16 = 0$$

$$5) 64x^2 - 8x = 0$$

$$8) -x = 3x^2$$

$$11) x^3 = x^2$$

$$14) -7x^2 = 14x^3$$

$$17) 4x^3 + 5x^4 = 0$$

$$20) -20x^4 + 100x^3 = 0$$

$$23) 3x^3 - 27x = 0$$

$$26) x^3 - \frac{1}{16}x = 0$$

$$29) -x^3 + \frac{1}{49}x = 0$$

$$32) 4x^4 + x^2 = 0$$

$$35) 6x^3 + 7x = 0$$

$$38) 9x^3 + 27x = 0$$

$$41) 7x^5 - 28x^3 = 0$$

$$44) -6x^3 - 15x = 0$$

$$3) 5x^2 + 7x = 0$$

$$6) 18x - 9x^2 = 0$$

$$9) 3x^2 = 2x$$

$$12) 2x^3 = 3x^2$$

$$15) x^3 - 8x^2 = 0$$

$$18) -3x^4 - 4x^3 = 0$$

$$21) x^3 - 16x = 0$$

$$24) -4x^3 + 64x = 0$$

$$27) \frac{1}{25}x - x^3 = 0$$

$$30) -x^3 + \frac{1}{64}x = 0$$

$$33) 7x^5 + 2x^3 = 0$$

$$36) 9x^3 + x = 0$$

$$39) -2x^3 - x = 0$$

$$42) -x^3 - 3x = 0$$

Bài 6: Giải các phương trình sau

$$1) x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$4) x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$7) 7x^2 + 13x - 2 = 0$$

$$10) 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$2) 2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$5) 4x^2 + 9x - 13 = 0$$

$$8) x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$11) x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$3) x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$6) 6x^2 + 7x - 3 = 0$$

$$9) x^2 + x - 6 = 0$$

$$12) x^2 - 4x - 6 = 0$$

13) $x^2 - 6x + 7 = 0$

14) $3x^2 - x - 1 = 0$

16) $7x^2 + 2x + 1 = 0$

17) $x^2 - x + 1 = 0$

19) $x^2 - 4x + 5 = 0$

20) $9x^2 + x + 1 = 0$

22) $(3x^2 + 2x + 4)^2 = (x^2 - 4)^2$

23) $(2x^2 - x - 1)^2 - (x^2 - 7x + 6)^2 = 0$

24) $(4x^2 - 3x - 2)^2 - (3x^2 + 5x - 14)^2 = 0$

25) $(2x^2 - 3x - 4)^2 = (x^2 - x)^2$

26) $(x^2 - x + 5)^2 = (-3x^2 + 2x + 5)^2$

27) $(3x^2 + 3x - 2)^2 = x^2(x - 1)^2$

28) $x^2(-3 + 2x)^2 - (4x^2 - 2x + 1)^2 = 0$

29) $4x^2\left(\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2 - (x^2 + 5x - 5)^2 = 0$

30) $(4 - 6x + 4x^2)^2 = 9x^2\left(\frac{1}{3}x - 2\right)^2$

31) $16x^2\left(-2x + \frac{1}{4}\right)^2 = 25\left(x^2 + x + \frac{3}{5}\right)^2$

32) $36\left(-x^2 + 2x + \frac{11}{6}\right)^2 = 49x^2(x + 2)^2$

33) $64x^2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = 25\left(5x^2 + \frac{1}{5}\right)^2$

34) $x^2(-9x + 3)^2 - 4(9x^2 - 3x - 6)^2 = 0$

35) $64x^2\left(\frac{1}{4}x - \frac{7}{8}\right)^2 - 49\left(\frac{1}{7}x^2 - x + \frac{1}{7}\right)^2 = 0$

Bài 7. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO**ĐẶT BIẾN PHỤ LÀ ĐA THỨC****Bài 1:** Giải các phương trình sau:

1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

2) $9x^4 + 6x^2 + 1 = 0$

3) $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$

4) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

15) $4x^2 - 7x + 2 = 0$

18) $x^2 + x + 1 = 0$

21) $2x^2 - 6x + 8 = 0$

5) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

6) $2x^4 - 20x + 18 = 0$

7) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$

8) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$

9) $(x^2 - 2x - 5)^2 - 2(x^2 - 2x - 3) - 4 = 0$

10) $(x^2 - 5x + 7) - (9x - 2)(x - 3) = 1$

11) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 8 = 0$

12) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{8}{9} = 0$

13) $(x + 2)(x^2 - 10)(x - 2) = 40$

14) $(x^2 - 4x)^2 + (x - 2)^2 = 10$

15) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 3 = 0$

16) $x^2 - 2x + 3 - 3|x - 1| = 0$

17) $x^4 - 4x^2 + 5|x^2 - 2| = -8$

18) $x^4 - 6x^2 + 4|x^2 - 3| = -4$

19) $(2x + 1)(x + 1)^2(2x + 3) - 18 = 0$

20) $(2x + 1)^2(4x + 1)(4x + 3) - 18 = 0$

ĐẶT BIẾN PHỤ DẠNG $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + e$ **(với $a + b = c + d$)****Bài 2:** Giải các phương trình sau:

1) $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16 = 0$

2) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24 = 0$

3) $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 = 0$

4) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24 = 0$

5) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = 0$

6) $(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7) - 20 = 0$

7) $(x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) - 28 = 0$

8) $x(x - 1)(x + 1)(x + 2) - 3 = 0$

9) $(x + 2)(x + 3)(x - 7)(x - 8) - 144 = 0$

10) $(x - 7)(x - 5)(x - 4)(x - 2) - 72 = 0$

11) $(x^2 + 8x + 12)(x^2 + 12x + 32) + 16 = 0$

12) $(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 8x + 15) - 24 = 0$

13) $(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 6x + 8) - 24 = 0$

14) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 10x + 21) - 20 = 0$

15) $(x^2 + x - 2)(x^2 + 9x + 18) - 28 = 0$

16) $(x^2 + 5x + 6)(x^2 - 15x + 56) - 144 = 0$

17) $(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 7x + 10) - 72 = 0$

ĐẶT BIẾN PHỤ DẠNG ĐẲNG CẤP BẬC HAI**Bài 3:** Giải các phương trình sau:

1) $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0$

2) $(x^2 - 1)^2 - x(x^2 - 1) - 2x^2 = 0$

3) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = 0$

4) $4(x^2 + x + 1)^2 + 5x(x^2 + x + 1) + x^2 = 0$

5) $(x^2 - x + 1)^2 - 5x(x^2 - x + 1) + 4x^2 = 0$

6) $(x^2 - x + 2)^4 - 3x^2(x^2 - x + 2)^2 + 2x^4 = 0$

7) $3(-x^2 + 2x + 3)^4 - 26x^2(-x^2 + 2x + 3)^2 - 9x^4 = 0$

$$\begin{aligned} 8) -6(-x^2 - x + 1)^2 + x^2(-x^2 - x + 1)^2 + 5x^2 &= 0 \\ 9) (x^2 - x - 1)^4 + 7x^2(x^2 - x - 1)^2 + 12x^4 &= 0 \\ 10) 10(x^2 - 2x + 3)^4 - 9x^2(x^2 - 2x + 3)^2 - x^4 &= 0 \\ 11) x^4 + 9 = 5x(x^2 - 3) \\ 12) (x^2 - 6x - 9)^2 = x(x^2 - 4x - 9) \\ 13) x^4 + (x + 1)(5x^2 - 6x - 6) &= 0 \\ 14) (x^2 + 1)^2 + (x + 1)(3x^2 - 4x - 5) &= 0 \\ 15) x^2(x - 1)^2 + x(x^2 - 1) = 2(x + 1)^2 \\ 16) x^4 + (x - 1)(3x^2 + 2x - 2) &= 0 \\ 17) 4x^4 + 12x^3 + 12x + 4 = 47x^2 \\ 18) 2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^2 - 1) \\ 19) (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 14x^2 \\ 20) x^4 + x^3 + x + 1 = 4x^2 \end{aligned}$$

ĐẶT BIẾN PHỤ DẠNG HỒI QUY

Bài 4: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 &= 0 & 2) x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 &= 0 \\ 3) x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1 &= 0 & 4) x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 &= 0 \\ 5) 6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 &= 0 & 6) x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 &= 0 \\ 7) x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 14x + 4 &= 0 & 8) x^4 - 10x^3 - 15x^2 + 20x + 4 &= 0 \\ 9) 2x^4 - 5x^3 - 27x^2 + 25x + 50 &= 0 & 10) 3x^4 + 6x^3 - 33x^2 - 24x + 48 &= 0 \end{aligned}$$

ĐẶT BIẾN PHỤ DẠNG $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + ex^2$ (với $ab = cd$)

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) (x - 3)(x - 5)(x - 6)(x - 10) - 24x^2 &= 0 \\ 2) (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x - 6) + 32x^2 &= 0 \\ 3) (x + 1)(x - 4)(x + 2)(x - 8) + 4x^2 &= 0 \\ 4) (x - 2)(x - 3)(x - 6)(x - 4) - 72x^2 &= 0 \\ 5) (x + 3)(x - 1)(x - 5)(x + 15) + 64x^2 &= 0 \\ 6) (x - 2)(x - 4)(x - 5)(x - 10) - 54x^2 &= 0 \\ 7) (x + 2)(x - 4)(x + 6)(x - 12) + 36x^2 &= 0 \\ 8) 4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) - 3x^2 &= 0 \\ 9) (x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) - 4x^2 &= 0 \\ 10) (x - 18)(x - 7)(x + 35)(x + 90) - 67x^2 &= 0 \end{aligned}$$

DẠNG $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) (x + 2)^4 + (x + 8)^4 &= 272 & 2) (x + 6)^4 + (x + 4)^4 &= 82 \\ 3) (x + 3)^4 + (x + 5)^4 &= 16 & 4) (3 - x)^4 + (2 - x)^4 &= (5 - 2x)^4 \\ 5) (x - 2)^6 + (x - 4)^6 &= 64 \end{aligned}$$

DẠNG ĐOÁN NGHIỆM

Bài 7: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= 0 & 2) x^3 - x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ 3) 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 &= 0 & 4) x^3 - 5x^2 + 2x + 8 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) -6x^3 + x^2 + 5x - 2 &= 0 & 6) 3x^3 + 19x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ 7) x^3 + 3x^2 - 10x - 24 &= 0 & 8) 2x^3 - 11x^2 + 10x + 8 &= 0 \\ 9) 2x^3 + 11x^2 + 3x - 36 &= 0 & 10) 6x^3 - 17x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ 11) x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 8x - 12 &= 0 \\ 12) -3x^4 + 20x^3 - 35x^2 - 10x + 48 &= 0 \\ 13) -2x^4 - 7x^3 - x^2 + 7x + 3 &= 0 \\ 14) x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 17x^2 - 13x + 2 &= 0 \\ 15) x^5 - 5x^4 + 6x^3 - x^2 + 5x - 6 &= 0 \\ 16) 3x^3 - 5x^2 + 5x - 2 &= 0 & 17) 2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 &= 0 \\ 18) 3x^3 + 5x^2 - x - 2 &= 0 & 19) 4x^3 + x^2 + x - 3 &= 0 \\ 20) 4x^3 - x^2 + x + 3 &= 0 & 21) 4x^3 - 7x^2 - x + 3 &= 0 \\ 22) 6x^3 - 7x^2 + 5x - 2 &= 0 & 23) 4x^3 - 5x^2 + 6x + 9 &= 0 \\ 24) 4x^3 + 5x^2 + 10x - 12 &= 0 & 25) 5x^3 - 12x^2 + 14x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

DẠNG $a^n = b^n$

Bài 8: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) x^4 &= 24x + 32 & 2) x^4 &= 2x^2 + 8x + 3 \\ 3) x^4 &= 24x + 32 & 4) x^4 &= 2x^2 - 12x + 8 \\ 5) x^4 &= 4x + 1 & 6) x^4 &= 8x + 7 \\ 7) x^4 - 13x^2 + 18x - 5 &= 0 & 8) x^4 + x^2 + 6x - 8 &= 0 \\ 9) x^3 + 3x^2 - 3x + 1 &= 0 & 10) x^3 - 3x^2 + 9x - 9 &= 0 \end{aligned}$$

DẠNG DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 9: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) x^2 + y^2 &= xy \\ 2) x^2 + y^2 - 2(x + 2y) + 5 &= 0 \\ 3) 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 &= 0 \\ 4) x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2 &= 0 \\ 5) 2x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \\ 6) 5x^2 + 3y^2 + z^2 - 4x + 6xy + 4z + 6 &= 0 \\ 7) 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + 2x + 4y + 5 &= 0 \\ 8) x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ 9) x^6 - 2x^3 + x^2 - 2x + 2 &= 0 \\ 10) x^2 - 4xy + 5y^2 + 10x - 22y + 26 &= 0 \end{aligned}$$

Bài 8. PHƯƠNG TRÌNH PHÂN THỨC KHÔNG MẪU MỰC

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) \frac{1}{x^2 - 3x + 3} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4} &= \frac{6}{x^2 - 3x + 5} \\ 2) \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{x^2 - 2x + 3} &= \frac{9}{2(x^2 - 2x + 4)} \\ 3) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$4) \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$$

$$5) \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1$$

$$7) \frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} - x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$6) \frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$8) x^2 + x - \frac{7}{x^2 + x + 1} = 5$$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

$$1) \frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1$$

$$2) \frac{3x}{x^2 - 3x + 1} + \frac{7x}{x^2 + x + 1} = -4$$

$$3) \frac{x^2 - 10x + 5}{x^2 - 6x + 15} - \frac{4x}{x^2 - 12x + 15} = 1$$

$$4) \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4x + 5} - \frac{x^2 - 5x + 5}{x^2 - 6x + 5} = -\frac{1}{4}$$

$$5) \frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2}$$

$$6) \frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{5x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$$

$$7) \frac{x^2 - 13x + 15}{x^2 - 14x + 15} - \frac{x^2 - 15x + 15}{x^2 - 16x + 15} = -\frac{1}{12}$$

$$8) \frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

$$1) \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$

$$2) \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 + 8x + 15} = \frac{1}{6}$$

$$3) \frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} = \frac{1}{3}$$

$$4) \frac{1}{x^2 + 5x + 4} + \frac{1}{x^2 + 11x + 28} + \frac{1}{x^2 + 17x + 70} + \frac{1}{x^2 + 23x + 130} = \frac{4}{13}$$

$$5) \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} = \frac{1}{2}$$

$$6) \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{3}{x^2 - 11x + 28} + \frac{5}{x^2 - 19x + 84} = \frac{1}{4}$$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

$$1) 20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48 \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$$

$$2) \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - \frac{5(x^2-4)}{2(x^2-1)} = 0$$

$$3) \frac{(2007-x)^2 + (2007-x)(x-2008) + (x-2008)^2}{(2007-x)^2 - (2007-x)(2008-x) + (x-2008)^2} = \frac{19}{49}$$

$$4) 5\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 44\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 12 \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$$

$$5) 20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 4 \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$$

$$6) 3\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 + 168\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - 46 \cdot \frac{x^2-9}{x^2-4} = 0$$

$$7) \frac{x^3+x}{(x^2-x+1)^2} = 2$$

$$8) \frac{(x-1)^2 x}{(x^2-x+1)^2} = \frac{2}{9}$$

$$9) \frac{x^4+4}{x^2-2} = 5x$$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$1) x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 12$$

$$2) x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$$

$$3) x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 15$$

$$4) x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 27$$

$$5) \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 5\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x}\right)$$

$$6) \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

$$7) \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 = \frac{40}{9}$$

$$8) x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8$$

$$9) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{2}\right) - 12 = 0$$

$$10) x^3 + \frac{1}{x^3} = 6\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$11) x^3 + \frac{1}{x^3} = 13\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

$$1) x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3 - x^2} = 2$$

$$2) \frac{x^4}{2x^2+1} + \frac{2x^2+1}{x^4} = 2$$

$$3) \frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$$

$$4) \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{-5}{2}$$

$$5) x \cdot \frac{8-x}{x-1} \left(x - \frac{8-x}{x-1}\right) = 15$$

$$6) x \cdot \left(\frac{5-x}{x+1}\right) \left(x + \frac{5-x}{x+1}\right) = 6$$

$$7) \left(\frac{7x-x^2}{x+1}\right) \left(\frac{7+x^2}{x+1}\right) = 10$$

$$8) \left(\frac{3x-x^2}{x-2}\right) \left(\frac{x^2-6}{x-2}\right) = 2$$

$$9) x \cdot \left(\frac{4-x}{x+2} \right) \left(x + \frac{8-2x}{x+2} \right) = 3$$

$$10) x \cdot \left(\frac{4-x}{x-x} \right) \left(x + \frac{3x-3}{x-3} \right) = 4$$

$$11) \left(\frac{7x-x^2}{x+3} \right) \left(\frac{x^2+21}{x+3} \right) = 12$$

$$12) \left(\frac{7x-x^2}{x-1} \right) \left(\frac{x^2-7}{x-1} \right) = 12$$

Bài 7: Giải các phương trình ẩn x sau:

$$1) \frac{x+1}{65} + \frac{x+3}{63} = \frac{x+5}{61} + \frac{x+7}{59}$$

$$2) \frac{x-1}{1995} - \frac{x+3}{1991} = \frac{x+7}{1987} - \frac{x+11}{1983}$$

$$3) \frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} + 4 = 0$$

$$4) \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} + \frac{x-a-b}{c} = 3$$

$$5) \frac{a+b-x}{c} + \frac{a+c-x}{b} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{4x}{a+b+c} = 1$$

$$6) \frac{2a+b+c-3x}{a} + \frac{a+2b+c-3x}{b} + \frac{a+b+2c-3x}{c} = 6 - \frac{9x}{a+b+c}$$

$$7) \frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} + \frac{x-c}{ab} = 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$8) \frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} + \frac{x-bc}{b+c} = a+b+c$$

Bài 9. CÁC BÀI TOÁN CÓ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức:

$$1) A = |-3| + |4| - 1$$

$$2) A = |-2007| + |-2005| - 1$$

$$3) A = \left| -\frac{3}{2} \right| + \left| \frac{2}{3} \right| - \frac{3}{4}$$

$$4) A = \left| -\frac{1}{15} \right| + \left| -\frac{6}{5} \right| - \frac{4}{3}$$

$$5) A = |-3| - |-4| - 7$$

$$6) A = -|-6| - |-4| + 9$$

$$7) A = 2 - |-11| - |19|$$

$$8) A = \frac{3}{2} - \left| -\frac{3}{4} \right| - \left| \frac{5}{4} \right|$$

$$9) A = |-3-4| + |4-2| - 1$$

$$10) A = \left| 2 - \frac{4}{3} \right| - \left| 1 - \frac{3}{4} \right| - \frac{1}{6}$$

$$11) A = \left| -\frac{1}{2} \right| + \left| -\frac{2}{3} \right| - \left| \frac{3}{4} \right| - \left| \frac{4}{5} \right| - \frac{5}{6}$$

$$12) A = 1 - \left| \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \right| - \left| \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) \right|$$

$$13) A = \frac{4}{3} - \left| \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{15} \right) - 6 \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{10} \right) \right| + \left| 4 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) - 3 \right|$$

$$14) A = 2 - 2 \left| -4 \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2} \right) \right| - 3 \left| 1 - 2 \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4} \right) \right|$$

$$15) A = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left| \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) \right| - \frac{3}{2} \left| \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) \right|$$

$$16) A = \frac{5}{4} - \frac{5}{4} \left| - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{15} \right) + 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{10} \right) \right| - \frac{5}{4} \left| 3 - \left(\frac{3}{5} - \frac{5}{2} \right) \right|$$

$$17) A = [2005 - (2004 - |-2003|)] [2003 - |2004 - 2| - 2003]$$

$$18) A = [3 - |-3 + 3(3 - |-3|)|] \cdot [2 - (2 - 2(2 - 2|-2|))]$$

$$19) A = \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right| \right) \right] \cdot \left[\frac{2}{3} - \left| \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \right| - \frac{9}{4} \right]$$

$$20) A = \frac{\frac{3}{2} \left[\frac{4}{3} \cdot 2007^0 - 1 \right] + \left| -\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right|}{\left[\frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} - \left| \frac{4}{3} - \frac{3}{4} \right| \right) \right]}$$

Bài 2: Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức sau:

$$1) A = |x-3| - 2x - 1$$

$$2) A = |x| + x - 1$$

$$3) A = |6-x| - 2x + 4$$

$$4) A = |2-x| + 4x - 7$$

$$5) A = |x-2| - 2x - 16$$

$$6) A = |4-2x| + 2x - 8$$

$$7) A = |2x-3| - 4x - 3$$

$$8) A = \left| -x + \frac{4}{3} \right| - x + \frac{4}{3}$$

$$9) A = |3-3x| - 9 - 3x$$

$$10) A = 2x + 4 - |x-3|$$

$$11) A = -3x - 2 - |2x-1|$$

$$12) A = 6 - 3x - |3x+3|$$

$$13) A = 2 + |x-1| + |x-2|$$

$$14) A = 10 - 2x + |x-5| + |x-4|$$

$$15) A = |x-1| + |x-3| - 4$$

$$16) A = |x+5| + |x-3| - 2x + 1$$

$$17) A = 24 - 5|x-1| + 4|x+10|$$

$$18) A = 2 + |3x-5| - |2x+4|$$

$$19) A = 9 + x - |5-4x| - |3x-5|$$

$$20) A = |x+5| - |x-1| - |x-2|$$

Bài 3: Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức sau:

$$1) A = |x+3| - 2x + 1 \text{ với } x \geq -3$$

$$2) A = |x-3| + x - 1 \text{ với } x \geq 3$$

$$3) A = |1-x| - 2x + 4 \text{ với } x \geq 1$$

$$4) A = |3-x| + 3x - 5 \text{ với } x \geq 4$$

- 5) $A = |x + 2| - x - 6$ với $x \leq -2$
 7) $A = |2x + 3| - 2x - 3$ với $x \leq -\frac{3}{2}$
 9) $A = |3 - 2x| - 9 - 2x$ với $x \geq \frac{3}{2}$
 11) $A = 3x - 2 + |2x - 1|$ với $x \leq \frac{1}{2}$
 13) $A = 3 - x - |2x - 4|$ với $x \geq 3$
 15) $A = 4 - x - |x - \frac{3}{2}|$ với $x \leq -1$
 17) $A = 3x - 4 - |5x + 3|$ với $x \leq -2$
 19) $A = 2007 - 2008x - |2005x - 2006|$ với $x \leq 1$
 20) $A = 2006 - |2007x + 2005| - 2004x$ với $x \leq -1$
- 6) $A = |4 - x| + x - 8$ với $x \leq 4$
 8) $A = |-x + \frac{4}{3}| - x + \frac{4}{3}$ với $x \geq \frac{4}{3}$
 10) $A = 2x + 4 + |3x + 3|$ với $x \geq -1$
 12) $A = 6 + 3x - |3x + 3|$ với $x \geq 0$
 14) $A = 4 - |3x - 6| - 2x$ với $x \geq 3$
 16) $A = 3 - \frac{1}{3}x - |\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x|$ với $x \geq 5$
 18) $A = 4 - |3 - \frac{3}{4}x| - \frac{4}{3}x$ với $x \leq 0$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

- 1) $|2x| = |x + 1|$
 3) $|x| = |2x - 1|$
 5) $|x| = |2x - 5|$
 7) $|5x - 1| = |2x - 6|$
 9) $|5 - x| = |2x - 5|$
 11) $|4 - 3x| = |2x - 10|$
 13) $|x - \frac{3}{2}| = |\frac{3}{2}x - 1|$
 15) $|\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}| = |\frac{3}{4}x - \frac{4}{5}|$
 17) $|\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}| = |\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}|$
 19) $|2006 - x| = |2x - 2005|$
 21) $|\frac{2006}{3} - \frac{x}{2}| = |\frac{x}{3} - \frac{3}{2}|$
 23) $|x| = |-x|$
 25) $|2x + 2| = |2x + 1|$
 27) $|x + 6| = |x + 1|$
- 2) $|x + 3| = |-4|$
 4) $|x + 1| = |3x + 1|$
 6) $|3x + 2| = |-31|$
 8) $|1 - x| = |3x + 4|$
 10) $|x - 3| = |3x - 1|$
 12) $|15 - 2x| = |x + 4|$
 14) $|\frac{5}{3}x - 3| = |3x - \frac{3}{5}|$
 16) $|\frac{1}{3} - \frac{x}{3}| = |\frac{x}{4} - \frac{4}{3}|$
 18) $|\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}| = |1 - \frac{4}{3}x|$
 20) $|2007 - \frac{3}{2}x| = |2006 - \frac{1}{2}x|$
 22) $|x| = |x - 1|$
 24) $|2 - x| = |1 - x|$
 26) $|x - 2| = |1 - x|$
 28) $|2x - 1| = |2x + 1|$

29) $|3x - 2| = |3x + 2|$

31) $|3x - 3| = |3 + 3x|$

33) $|x - \frac{4}{3}| = |\frac{2}{3} - x|$

35) $|\frac{1}{27} + 26x| = |26x + \frac{1}{27}|$

37) $|x - \frac{2}{3}| = |-\frac{3}{2}|$

39) $|2004| = |1 - 2003x|$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

1) $|2x| = 3$

3) $7 = |2x - 1|$

5) $|x| = 2x - 5$

7) $|5x - 1| = 2x - 6$

9) $|5 - x| = 2x - 5$

11) $|x - 3| = -x$

13) $|1 - x| = 2x - 1$

15) $|2x + 2| = -3 - x$

17) $|x + 6| = -6 - x$

19) $|3x - 2| = 3x - 2$

21) $|4 - 3x| = 2x - 10$

23) $|x - \frac{3}{2}| = \frac{3}{2}x - 4$

25) $|\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}| = \frac{3}{4}x - \frac{4}{5}$

27) $|\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}| = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}$

29) $|2006 - x| = 2x - 2007$

31) $|x - \frac{4}{3}| = \frac{2}{3} - x$

33) $|\frac{1}{27} + 26x| = 26x + \frac{1}{27}$

35) $3 - |x| = 0$

37) $|x + \frac{1}{2}| - 2x = 0$

39) $3x - |4x| = 0$

30) $|2 - 4x| = |1 - 4x|$

32) $|1 - 2x| = |2x - 1|$

34) $|\frac{3}{2}x - 2| = |2 - \frac{3}{2}x|$

36) $|x| = |-1|$

38) $|\frac{3}{2}x - 1| = |-2005|$

40) $|\frac{32}{3}| = |-\frac{3}{2} - \frac{4}{3}x|$

2) $|x + 3| = -3$

4) $|x + 1| = 3x$

6) $|3x + 2| = -31$

8) $|1 - x| = 3x + 4$

10) $|x - 3| = 3x - 1$

12) $|x| = 1 - x$

14) $|2 - x| = 2 - x$

16) $|x - 2| = -3 - x$

18) $|2x - 1| = -19 - x$

20) $|2 - 4x| = 4x - 2$

22) $|15 - 2x| = x + 4$

24) $|\frac{5}{3}x - 3| = 3x - \frac{3}{5}$

26) $|\frac{1}{3} - \frac{x}{3}| = \frac{x}{4} - \frac{4}{3}$

28) $|\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}| = 1 - \frac{4}{3}x$

30) $|2007 - \frac{3}{2}x| = 2006 - \frac{1}{2}x$

32) $|\frac{3}{2}x - 2| = 2 - \frac{3}{2}x$

34) $|\frac{32}{3} + \frac{4}{3}x| = -\frac{3}{2} - \frac{4}{3}x$

36) $\frac{4}{3} - |3 - 2x| = 0$

38) $3 + 2x - |x| = 0$

40) $x - 3 - |x + 3| = 0$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

- 1) $|x^2| = |5x|$
- 3) $|x^2 + 6| = |-5x|$
- 5) $|x^2 + 5| = |6x|$
- 7) $|x^2 + 30| = |-11x|$
- 9) $|x^2 + 12| = |-8x|$
- 11) $|x^2 + 21| = |-10x|$
- 13) $|x^2 + 1| = |2x|$
- 15) $|x^2 + 9| = |6x|$
- 17) $|x^2 + 25| = |-10x|$
- 19) $|4x^2 + 1| = |-4x|$
- 2) $|-3x^2| = |7x|$
- 4) $|x^2 + 2| = |3x|$
- 6) $|x^2 + 18| = |-9x|$
- 8) $|x^2 + 3| = |4x|$
- 10) $|x^2 + 8| = |6x|$
- 12) $|x^2 + 8| = |-9x|$
- 14) $|x^2 + 4| = |-4x|$
- 16) $|x^2 + 16| = |-8x|$
- 18) $|-x^2 - 36| = |12x|$
- 20) $|9x^2 + 1| = |6x|$

Bài 7: Giải các phương trình sau:

- 1) $x^2 - 2x = |-4x + 8|$
- 3) $x^2 - 4x - 8 = |-2x + 16|$
- 5) $x^2 + 6x + 8 = |4x + 16|$
- 7) $x^2 + 3x - 20 = |x - 12|$
- 9) $x^2 - x - 12 = |-5x + 20|$
- 11) $x^2 + 4x + 5 = |2x + 3|$
- 13) $x^2 + 6x + 9 = |-1|$
- 15) $x^2 - x + 7 = |-5x + 1|$
- 17) $x^2 + 5x + 7 = |3x + 5|$
- 19) $x^2 + 3x + 4 = |-x - 2|$
- 21) $|x + 6| = x^2$
- 23) $|1 - x| = x^2 - 1$
- 25) $|4 - x| = x^2 + 2x$
- 27) $|2x + 4| = x^2 - x$
- 29) $|x + 1| = x^2 - 2x - 3$
- 31) $|x + 2| = 2x^2 + 4x$
- 33) $|x + 1| = 2x^2 + 4x + 1$
- 35) $|2x + 1| = 2x^2 + 3x + 1$
- 37) $|x + 2| = 3x^2 + 4x$
- 39) $|2x + 2| = -3x^2 - 3x$
- 41) $|3x + 2| = 3x^2 + 2x$
- 43) $|-3x + 12| = x^2 - 4x$
- 2) $x^2 + 4x = |6x + 24|$
- 4) $x^2 + 3x + 20 = |-9x - 12|$
- 6) $x^2 + 11x + 28 = |-x - 4|$
- 8) $x^2 + 2x + 16 = |-8x - 8|$
- 10) $x^2 + 7x - 4 = |3x + 28|$
- 12) $x^2 + 5x + 7 = |x + 1|$
- 14) $x^2 - 2x + 5 = |-4x + 3|$
- 16) $x^2 + 9 = |-6x - 1|$
- 18) $x^2 + 6x + 9 = |2x + 3|$
- 20) $x^2 + 4x + 6 = |-2x - 4|$
- 22) $|x - 6| = x^2 - 4x$
- 24) $|2x - 2| = x^2 - x$
- 26) $|x + 4| = x^2 - 3x - 1$
- 28) $|x + 3| = x^2 - 2x - 1$
- 30) $|3x + 3| = x^2 - x - 2$
- 32) $|2x + 2| = -2x^2 - 3x$
- 34) $|x + 1| = -x^2 - 4x - 1$
- 36) $|2x + 1| = -2x^2 - 3x - 1$
- 38) $|2x + 1| = -3x^2 - 3x - 1$
- 40) $|3x + 2| = 3x^2 + 2x$
- 42) $|3x + 1| = -3x^2 - 2x - 1$
- 44) $|4x - 12| = x^2 - 3x$

$$45) |3x - 6| = x^2 - 4x + 6$$

$$47) |2x + 12| = -x^2 - 5x$$

$$49) |x + 12| = x^2 + 6x$$

$$51) |6x + 12| = -x^2 - x$$

$$53) |-2x + 8| = -x^2 + 4x$$

$$55) |3x + 6| = x^2 + 2x$$

$$57) |x + 1| = x^2 - 5$$

$$59) |2x + 4| = x^2 + 3x + 2$$

Bài 8: Giải các phương trình sau:

- 1) $|x^2| = 1$
- 3) $|x^2| = x$
- 5) $|x^2 + 5x| = 6x$
- 7) $|x^2 + 3x| = -12x$
- 9) $|5x^2 - 12x| = -3x$
- 11) $|x^2 - x| = x - 1$
- 13) $|x^2 - 5x| = 10 - 2x$
- 15) $|x^2 + 5x| = -3x - 15$
- 17) $|4x^2 + 3x| = -12x - 9$
- 19) $|5x^2 - 12x| = 24 - 10x$
- 2) $|x^2| = 4$
- 4) $|x^2 + 2x| = -x$
- 6) $|x^2 - x| = -x$
- 8) $|x^2 - 3x| = 4x$
- 10) $|-x^2 - 8x| = -5x$
- 12) $|x^2 - 4| = 4 + 2x$
- 14) $|x^2 + 2x| = -x - 2$
- 16) $|2x^2 - x| = -4x + 2$
- 18) $|2x^2 - 3x| = 6 - 4x$
- 20) $|-x^2 - \frac{3}{2}x| = 2x + 3$

NÂNG CAO

Bài 9: Giải các phương trình sau:

- 1) $|x + 2| + |x - 3| = 6$
- 3) $|x + 5| + |3 - x| = 12$
- 5) $|2x + 2| + |2x - 3| = 11$
- 7) $|6 - 3x| + |2x + 2| = 14$
- 9) $|x + 2| + |7 - x| = 3x + 4$
- 11) $|4x - 2| + |5 - 3x| = 2x + 4$
- 2) $|x - 2| + |x + 4| = 10$
- 4) $|x - \frac{1}{2}| + |x - \frac{3}{2}| = 2$
- 6) $|3x + 2| + |2x - 3| = 4$
- 8) $|x + 2| + |x + 3| = 4 + x$
- 10) $|4x + 7| - |2x - 3| = 4x + 1$
- 12) $x - |3x + 2| + |x - 3| = 0$

$$\begin{aligned} 13) |x-1| + |x-2| + |x-3| &= 12 & 14) |x+1| + |x+2| + |x+3| &= 7 \\ 15) |x| + |x+2| - |x+4| &= 4-x & 16) |x| - |3-x| + |x-4| &= 3x \\ 17) |x| + |x+1| + |x+2| + |x+3| &= 6+x \\ 18) |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| &= 6+3x \\ 19) |2x-3| + |3x-4| + |4x-5| + |5x-6| &= 7x-8 \\ 20) 1 - |3x+1| - |4x+2| - |5x+3| - |6x+4| &= 0 \end{aligned}$$

Bài 10: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) |2x-1| &= x & 2) |x+2| &= 2x \\ 3) |2x+3| &= 3x & 4) |1-x| &= -2x \\ 5) |2-x| &= 2-2x & 6) |x+4| &= 3x-9 \\ 7) |2x| + |x+1| &= 4x & 8) |x+2| + |3+x| &= 5x \\ 9) |x+26| + |x+27| &= 3x & 10) |7-x| + |9-x| &= 2-x \\ 11) |3-x| + |2-x| &= -3x & 12) |x+2| + |x+1| &= 3x \\ 13) |x+3| + |2x+3| &= 4x & 14) |3x+2| + |3+2x| &= 6x \\ 15) |x+2| + |x+9| &= 3x-1 & 16) |x-1| + |x+4| &= 3x-9 \\ 17) |3x-7| + |3x-1| &= 4x-20 & 18) |5x+2| + |3+5x| &= 7x-1 \\ 19) |x+26| + |x+27| &= 3x & 20) |7-x| + |9-x| &= 2-x \\ 21) |2x-3| + 2|3-x| &= x-4 & 22) |3-2x| + |2-x| &= 1-x \\ 23) |4x+5| + |2-x| &= 3x-7 & 24) |3x-2| + |1-5x| &= -2x \\ 25) |x+1| + |x+2| + |x+3| &= 4x & 26) |x-1| + |x-2| + |x-3| &= -4x \\ 27) |2x-1| + |3x-2| + |4x-3| - 5x + 4 &= 0 \\ 28) |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| &= 5x \\ 29) |2x-1| + |3x-2| + |4x-3| + |5x-4| &= -20x+1 \\ 30) |x-1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| + |x+5| &= 0 \end{aligned}$$

Bài 11: Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu bằng xảy ra khi nào?

$$\begin{aligned} 1) |A| &\geq A & 2) |A| &\geq -A \\ 3) |A| + |B| &\geq A + B & 4) |A| + |B| &\geq |A+B| \\ 5) |A| - |B| &\leq |A-B| & 6) |A| + |B| + |C| &\geq A+B+C \\ 7) |A| + |B| + |C| &\geq A+B-C & 8) |A| + |B| + |C| &\geq A-B-C \\ 9) |A| + |B| + |C| &\geq |A+B+C| & 10) |A| - |B| - |C| &\leq |A+B+C| \end{aligned}$$

Bài 12: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) |x+1| &= x+1 & 2) |x-1| &= x-1 \\ 3) |x+\frac{5}{3}| &= x+\frac{5}{3} & 4) |x-\frac{5}{4}| &= x-\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$5) |x+1| = 1-x$$

$$7) |x-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}-x$$

$$9) |x+3| = -x-3$$

$$11) 3 - |x-3| = x$$

$$13) \frac{x}{2} - \left| \frac{3}{4} - \frac{x}{2} \right| = \frac{3}{4}$$

$$15) |x+2| + |x| = x+2$$

$$17) |2x+2| - 2 = 2x - |x|$$

$$19) |x-1| + x+3 = 4 - |4x-3|$$

Bài 13: Giải các phương trình sau:

$$1) |x+3| + |4-x| = 0$$

$$3) \left| \frac{3}{2}x - \frac{6}{5} \right| + \left| \frac{4}{5} - x \right| = 0$$

$$5) |3x+1| + |5-2y| = 0$$

$$7) |3x-7| + \left| \frac{3}{2}y + 6 \right| = 0$$

$$9) 3|x+3| + 4|y+5| = 0$$

$$15) \left| \frac{3}{2}x + 14 \right| + 3|4y+7x| = 0$$

$$17) 4|2x-7| + 5\left| 3y - \frac{4}{3} \right| + 6\left| \frac{3}{2}z + \frac{4}{5} \right| = 0$$

$$18) |x+1| + |y+2| + |z-y-x| = 0$$

$$19) |x-2| + |y-3| + |2z-y+x| = 0$$

$$20) \left| \frac{3}{2}x - \frac{4}{3} \right| + \left| \frac{4}{3}y - \frac{4}{7} \right| + |z+4y-3x| = 0$$

$$21) |x| + \left| \frac{1}{2}y - 3 \right| + |2z-y-x-2006| = 0$$

$$22) |x-1| + |y-3x| + |2z-y| = 0$$

$$23) |x-y| + |y-3| + |2z-x| = 0$$

$$24) |x-y| + \left| \frac{1}{2}y - z \right| + |2z-6| = 0$$

$$6) |x-4| = 4-x$$

$$8) \left| \frac{3}{4} - \frac{x}{2} \right| = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$$

$$10) \left| \frac{x}{3} - \frac{2}{5} \right| = -\frac{x}{3} + \frac{2}{5}$$

$$12) x - |x-5| = 5$$

$$14) \frac{5}{4}x + \left| \frac{5}{4} - \frac{5}{4}x \right| = \frac{5}{4}$$

$$16) |x-2| + |x-1| = x-1$$

$$18) |x+1| - x = 1 - |x|$$

$$20) |2x-1| + |2x| + 2x-1 = 0$$

$$2) \left| x - \frac{3}{2} \right| + |3-2x| = 0$$

$$4) |x+3| + |y+5| = 0$$

$$6) |2x+3| + |4y-7| = 0$$

$$8) \left| \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \right| + \left| \frac{4}{3} - \frac{4}{3}y \right| = 0$$

$$10) \frac{4}{3} \left| \frac{3}{4}x + 3 \right| + |y-3| = 0$$

$$16) |x+3| + |y+5| + |z-3| = 0$$

$$25) |x - z + 1| + \left| \frac{1}{2}y - 3z \right| + |2z - 2006| = 0$$

$$26) |2x - 3y| + \left| 4y - \frac{4}{3} \right| + |z - y - x| = 0$$

$$27) |2x - y| + \left| \frac{1}{2}y - 3 \right| + |z - y - x - 999| = 0$$

$$28) |x - 4z + 1| + \left| \frac{1}{2}y - 3x + z \right| + \left| \frac{2}{3}z - 2002 \right| = 0$$

$$29) \left| \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}y \right| + 5 \left| \frac{1}{2}y - \frac{2}{3} \right| + |33 - 22x - 11z| = 0$$

$$30) |x - 1| + |2y + z| + |y - z + 999| = 0$$

Bài 14: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$1) |x + 2| + |3 - x| \geq 5$$

$$2) |x - 2| + |7 - x| \geq 5$$

$$3) |x + 3| + |9 - x| \geq 12$$

$$4) |3x - 2| + |3 - 3x| \geq 1$$

$$5) |x + 2| + |x - 5| \geq 7$$

$$6) |x - 7| + |x + 4| \geq 11$$

$$7) |3x - 7| + |3x - 1| \geq 6$$

$$8) |5x + 2| + |3 + 5x| \geq 1$$

$$9) |x - 2006| + |x - 2007| \geq 1$$

$$10) |997 - x| + |999 - x| \geq 2$$

$$11) |3x + 8| \geq 6 - |3x + 2|$$

$$12) \left| x + \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{6} - \left| \frac{1}{3} + x \right|$$

$$13) |2x - 3| + 2|3 - x| \geq 3$$

$$14) 3|x - 2| \geq 3 - |3x - 3|$$

$$15) |2x + 1| + |2 - x| \geq 3 + x$$

$$16) |4x + 5| + |2 - x| \geq 7 + 3x$$

$$17) |3x + 2| + |1 - 5x| \geq 3 - 2x$$

$$18) |8 - x| + |2 + 3x| \geq 10 + 2x$$

$$19) \left| \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right| + \left| \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \right| \geq 1 - \frac{1}{6}x$$

$$20) |2x + 1| + |x - 2| \geq 3 + x$$

$$21) |x - 6| + |2x + 5| = 11 + x$$

$$22) |x - 3| + |2 - 2x| = 5 - 3x$$

$$23) |x - 5| + |2 - 3x| \geq 4x - 7$$

$$24) |2x + 1| - x \geq 3 - |2 - x|$$

$$25) |x - 4| + 6 \geq 2x - |2 - x|$$

$$26) |2x + 11| + |x + 2| \geq 13 + 3x$$

$$27) |2x - 4| + |5 - 3x| \geq x - 1$$

$$28) \left| 2x + \frac{5}{2} \right| + \left| \frac{3}{2} - x \right| \geq 4 - x$$

$$29) \left| \frac{1}{6} - \frac{3}{2}x \right| + \left| \frac{1}{3} + \frac{5}{4}x \right| \geq \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$30) \left| \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \right| + x \geq 2 - \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \right|$$

$$31) |x + 1| + |x + 2| + |3 - 2x| \geq 6$$

$$32) |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| \geq 3x + 6$$

$$33) |1 - x| + |2 - x| + |3 - x| \geq 6 - 3x$$

$$34) |x + 999| + |x + 1000| + |x + 1001| \geq 3(x + 1000)$$

$$35) |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \geq 3(2 - x)$$

$$36) |x - 4| + |x - 3| + |2x - 12| \geq 5$$

$$37) |x + 1| + |x + 2| + |3 - 3x| \geq 5x$$

$$38) |x + 1| + 2|x - 2| + |x + 3| \geq 8$$

$$39) |x + 1| + 2|x + 2| + 3|x + 3| \geq 2(3x + 7)$$

$$40) |x + 1| + |3x - 2| + |x + 7| \geq 10 - x$$

$$41) |x - 1| + |x - 2| + |3x + 7| \geq x + 10$$

$$42) |2x + 1| + |2 - 3x| + |x + 7| \geq 6(x + 1)$$

$$43) |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| \geq 2(2x + 5)$$

$$44) |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| \geq 2(x + 4)$$

$$45) |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| \geq 4$$

$$46) |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| \geq -2(x + 1)$$

$$47) |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| \geq -2(2x + 5)$$

$$48) |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| \geq 2(2x - 5)$$

$$49) |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| \geq 4$$

$$50) |x + 2003| + |x + 2005| + |x + 2007| + |x + 2009| \geq 8$$

Bài 15: Giải các phương trình sau:

$$1) |x + 2| + |3 - x| = 5$$

$$2) |x - 2| + |7 - x| = 5$$

$$3) |x + 3| + |9 - x| = 12$$

$$4) |3x - 2| + |3 - 3x| = 1$$

$$5) |x + 2| + |x - 5| = 7$$

$$6) |x - 7| + |x + 4| = 11$$

$$7) |3x - 7| + |3x - 1| = 6$$

$$8) |5x + 2| + |3 + 5x| = 1$$

$$9) |x - 2006| + |x - 2007| = 1$$

$$10) |997 - x| + |999 - x| = 2$$

$$11) |3x + 8| = 6 - |3x + 2|$$

$$12) \left| x + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{6} - \left| \frac{1}{3} + x \right|$$

$$13) |2x - 3| + 2|3 - x| = 3$$

$$14) 3|x - 2| = 3 - |3x - 3|$$

$$15) |2x + 1| + |2 - x| = 3 + x$$

$$16) |4x + 5| + |2 - x| = 7 + 3x$$

$$17) |3x + 2| + |1 - 5x| = 3 - 2x$$

$$18) |8 - x| + |2 + 3x| = 10 + 2x$$

$$19) \left| \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right| + \left| \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \right| = 1 - \frac{1}{6}x$$

$$20) |2x + 1| + |x - 2| = 3 + x$$

$$21) |x - 6| + |2x + 5| = 11 + x$$

$$22) |x - 3| + |2 - 2x| = 5 - 3x$$

$$23) |x - 5| + |2 - 3x| = 4x - 7$$

$$24) |2x + 1| - x = 3 - |2 - x|$$

$$25) |x - 4| + 6 = 2x - |2 - x|$$

$$26) |2x + 11| + |x + 2| = 13 + 3x$$

$$27) |2x - 4| + |5 - 3x| = x - 1$$

$$28) \left| 2x + \frac{5}{2} \right| + \left| \frac{3}{2} - x \right| = 4 - x$$

- 29) $\left| \frac{1}{6} - \frac{3}{2}x \right| + \left| \frac{1}{3} + \frac{5}{4}x \right| = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ 30) $\left| \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \right| + x = 2 - \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \right|$
- 31) $|x+1| + |x+2| + |3-2x| = 6$ 32) $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 3x+6$
- 33) $|1-x| + |2-x| + |3-x| = 6-3x$
- 34) $|x+999| + |x+1000| + |x+1001| = 3(x+1000)$
- 35) $|x-1| + |x-2| + |x-3| = 3(2-x)$
- 36) $|x-4| + |x-3| + |2x-12| = 5$
- 37) $|x+1| + |x+2| + |3-3x| = 5x$
- 38) $|x+1| + 2|x-2| + |x+3| = 8$
- 39) $|x+1| + 2|x+2| + 3|x+3| = 2(3x+7)$
- 40) $|x+1| + |3x-2| + |x+7| = 10-x$
- 41) $|x-1| + |x-2| + |3x+7| = x+10$
- 42) $|2x+1| + |2-3x| + |x+7| = 6(x+1)$
- 43) $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| = 2(2x+5)$
- 44) $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| = 2(x+4)$
- 45) $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| = 4$
- 46) $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| = -2(x+1)$
- 47) $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| = -2(2x+5)$
- 48) $|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| = 2(2x-5)$
- 49) $|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| = 4$
- 50) $|x+2003| + |x+2005| + |x+2007| + |x+2009| = 8$

Bài 16: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- | | |
|----------------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $ x + x+1 + x+2 \geq 2$ | 2) $ x-1 + x + x+2 \geq 3$ |
| 3) $ x-4 + x-1 + x+2 \geq 6$ | 4) $ x-1 + x + x+1 \geq 2$ |
| 5) $ x+1 + 2x+1 + x \geq 1$ | 6) $ x-2 + 2x-3 + x-1 \geq 1$ |
| 7) $ x-1 + 3-x + x-5 \geq 4$ | 8) $ 3x-2 + 2x-3 + 2x-1 \geq 2$ |
| 9) $ x-2 + 2x-3 + x-1 \geq 1$ | 10) $ x-1 + 3x-4 + x-3 \geq 2$ |
| 11) $ x+1 + x+2 + x+3 \geq 2x+5$ | 12) $ x-1 + x-2 + x-3 = 2x-3$ |
| 13) $ x-1 + x-2 + 2x-3 \geq 3x-4$ | |
| 14) $ x-1 + x+2 + 4-2x \geq 2x+1$ | |
| 15) $ x+1 + x+2 + x+3 + x+4 \geq 1-x$ | |
| 16) $ x+1 + x+2 + x+3 + x+4 \geq x+6$ | |

- 17) $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| \geq -3(x+2)$
- 18) $|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| \geq 3(x-2)$
- 19) $|x+1| + |x+2| + |x-3| + |x-4| \geq 3x$
- 20) $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| + |x+5| \geq 6$
- 21) $|x| + |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| \geq 6$
- 22) $|x-3| + |x-1| + |x| + |x+1| + |x+3| \geq 8$
- 23) $|x-4| - 4 + |x-2| - 2 + |x| + |x+2| - 2 + |x+4| - 4 \geq 0$
- 24) $|x-1| + |x-2| + |x-3| + |2x+8| + |3x+14| \geq 20$
- 25) $|2x-3| + |3x-1| + 4|x| + |3x+1| + |2x+3| \geq 8$

Bài 17: Giải phương trình sau:

- | | |
|---------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $ x + x+1 + x+2 = 2$ | 2) $ x-1 + x + x+2 = 3$ |
| 3) $ x-4 + x-1 + x+2 = 6$ | 4) $ x-1 + x + x+1 = 2$ |
| 5) $ x+1 + 2x+1 + x = 1$ | 6) $ x-2 + 2x-3 + x-1 = 1$ |
| 7) $ x-1 + 3-x + x-5 = 4$ | 8) $ 3x-2 + 2x-3 + 2x-1 = 2$ |
| 9) $ x-2 + 2x-3 + x-1 = 1$ | 10) $ x-1 + 3x-4 + x-3 = 2$ |
| 11) $ x+1 + x+2 + x+3 = 2x+5$ | 12) $ x-1 + x-2 + x-3 = 2x-3$ |
| 13) $ x-1 + x-2 + 2x-3 = 3x-4$ | |
| 14) $ x-1 + x+2 + 4-2x = 2x+1$ | |
| 15) $ x+1 + x+2 + x+3 + x+4 = 1-x$ | |
| 16) $ x+1 + x+2 + x+3 + x+4 = x+6$ | |
| 17) $ x+1 + x+2 + x+3 + x+4 = -3(x+2)$ | |
| 18) $ x-1 + x-2 + x-3 + x-4 = 3(x-2)$ | |
| 19) $ x+1 + x+2 + x-3 + x-4 = 3x$ | |
| 20) $ x+1 + x+2 + x+3 + x+4 + x+5 = 6$ | |
| 21) $ x + x-1 + x-2 + x-3 + x-4 = 6$ | |
| 22) $ x-3 + x-1 + x + x+1 + x+3 = 8$ | |
| 23) $ x-4 - 4 + x-2 - 2 + x + x+2 - 2 + x+4 - 4 = 0$ | |
| 24) $ x-1 + x-2 + x-3 + 2x+8 + 3x+14 = 20$ | |
| 25) $ 2x-3 + 3x-1 + 4 x + 3x+1 + 2x+3 = 8$ | |

Bài 18: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $ x+1 ^2 + x-1 ^2 \geq 2$ | 2) $ x+2 ^2 + x-2 ^2 \geq 8$ |
| 3) $ x+3 ^2 + x-3 ^2 \geq 18$ | 4) $ x+4 ^2 + x-4 ^2 \geq 32$ |

5) $|x+5|^2 + |x-5|^2 \geq 50$

7) $|x+2|^2 + |x|^2 \geq 2$

9) $|x|^2 + |x-4|^2 \geq 8$

11) $|x+1|^2 + |x-3|^2 \geq 8$

13) $|x+2004|^2 + |x+2006|^2 \geq 2$

15) $|x+2005|^2 + |x+2007|^2 \geq 2$

17) $|2x+1|^2 + |2x-1|^2 \geq 2$

19) $|x|^2 + |x-1|^2 \geq \frac{1}{2}$

6) $|x+6|^2 + |x-6|^2 \geq 72$

8) $|x|^2 + |x-2|^2 \geq 2$

10) $|x|^2 + |x+6|^2 \geq 18$

12) $|x+5|^2 + |x-1|^2 \geq 18$

14) $|x-999|^2 + |x-1001|^2 \geq 2$

16) $|x-2008|^2 + |x-2004|^2 \geq 8$

18) $\left|x + \frac{1}{2}\right|^2 + \left|x - \frac{1}{2}\right|^2 \geq \frac{1}{2}$

20) $|x-2007|^2 + |x-2006|^2 \geq \frac{1}{2}$

Bài 19: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $|x+1|^3 + |x-1|^3 \geq 2$ với $-1 \leq x \leq 1$

2) $|x+1|^3 + |x-1|^3 > 2$ với $x < -1$

3) $|x+1|^3 + |x-1|^3 > 2$ với $x > 1$

4) $|x+2|^3 + |x-2|^3 \geq 16$ với $-2 \leq x \leq 2$

5) $|x+2|^3 + |x-2|^3 > 16$ với $x < -2$

6) $|x+2|^3 + |x-2|^3 > 16$ với $x > 2$

7) $|x+3|^3 + |x-3|^3 \geq 54$ với $-3 \leq x \leq 3$

8) $|x+3|^3 + |x-3|^3 > 54$ với $x < -3$

9) $|x+3|^3 + |x-3|^3 > 54$ với $x > 3$

10) $\left|x + \frac{1}{2}\right|^3 + \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 \geq \frac{1}{4}$ với $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

11) $\left|x + \frac{1}{2}\right|^3 + \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 > \frac{1}{4}$ với $x < -\frac{1}{2}$

12) $\left|x + \frac{1}{2}\right|^3 + \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 > \frac{1}{4}$ với $x > \frac{1}{2}$

13) $|x|^3 + |x-2|^3 \geq 2$ với $0 \leq x \leq 2$

14) $|x|^3 + |x-2|^3 > 2$ với $x < 0$

15) $|x|^3 + |x-2|^3 > 2$ với $x > 2$

16) $|x+2005|^3 + |x+2007|^3 \geq 2$ với $-2007 \leq x \leq -2005$

17) $|x+2005|^3 + |x+2007|^3 > 2$ với $x < -2007$

18) $|x+2005|^3 + |x+2007|^3 > 2$ với $x > -2005$

19) $|x-997|^3 + |x-1003|^3 \geq 54$ với $997 \leq x \leq 1003$

20) $|x-997|^3 + |x-1003|^3 > 54$ với $x < 997$

21) $|x-997|^3 + |x-1003|^3 > 54$ với $x > 1003$

22) $|x+3,5|^3 + |x+7,5|^3 \geq 16$ với $-7,5 \leq x \leq -3,5$

23) $|x+3,5|^3 + |x+7,5|^3 > 16$ với $x < -7,5$

24) $|x+3,5|^3 + |x+7,5|^3 > 16$ với $x > -3,5$

25) $|x+1|^5 + |x-1|^5 \geq 2$ với $-1 \leq x \leq 1$

26) $|x+1|^5 + |x-1|^5 > 2$ với $x < -1$

27) $|x+1|^5 + |x-1|^5 > 2$ với $x > 1$

28) $|x+2|^5 + |x-2|^5 \geq 64$ với $-2 \leq x \leq 2$

29) $|x+2|^5 + |x-2|^5 \geq 64$ với $x < -2$

30) $|x+2|^5 + |x-2|^5 \geq 64$ với $x > 2$

Bài 20: Giải các phương trình sau:

1) $|x+1|^2 + |x-1|^2 = 2$

3) $|x+3|^2 + |x-3|^2 = 18$

5) $|x+5|^2 + |x-5|^2 = 50$

7) $|x+2|^2 + |x|^2 = 2$

9) $|x|^2 + |x-4|^2 = 8$

11) $|x+1|^2 + |x-3|^2 = 8$

13) $|x+2004|^2 + |x+2006|^2 = 2$

15) $|x+2005|^2 + |x+2007|^2 = 2$

17) $|2x+1|^2 + |2x-1|^2 = 2$

19) $|x|^2 + |x-1|^2 = \frac{1}{2}$

2) $|x+2|^2 + |x-2|^2 = 8$

4) $|x+4|^2 + |x-4|^2 = 32$

6) $|x+6|^2 + |x-6|^2 = 72$

8) $|x|^2 + |x-2|^2 = 2$

10) $|x|^2 + |x+6|^2 = 18$

12) $|x+5|^2 + |x-1|^2 = 18$

14) $|x-999|^2 + |x-1001|^2 = 2$

16) $|x-2008|^2 + |x-2004|^2 = 8$

18) $\left|x + \frac{1}{2}\right|^2 + \left|x - \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$

20) $|x-2007|^2 + |x-2006|^2 = \frac{1}{2}$

Bài 21: Giải các phương trình sau:

1) $|x+1|^3 + |x-1|^3 = 2$

2) $|x+2|^3 + |x-2|^3 = 16$

3) $|x+3|^3 + |x-3|^3 = 54$

5) $|x|^3 + |x-2|^3 = 2$

7) $|x-997|^3 + |x-1003|^3 = 54$

9) $|x+1|^5 + |x-1|^5 = 2$

11) $\left|x + \frac{1}{2}\right|^5 + \left|x - \frac{1}{2}\right|^5 = \frac{1}{16}$

13) $|x+10|^5 + |x-10|^5 = 200000$

15) $|2x+1|^5 + |2x-1|^5 = 2$

17) $\left|x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right|^5 + \left|x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|^5 = \frac{1}{\sqrt{8}}$

19) $|x|^7 + |x-2|^7 = 256$

4) $\left|x + \frac{1}{2}\right|^3 + \left|x - \frac{1}{2}\right|^3 = \frac{1}{4}$

6) $|x+2005|^3 + |x+2007|^3 = 2$

8) $|x+3,5|^3 + |x+7,5|^3 = 16$

10) $|x+2|^5 + |x-2|^5 = 64$

12) $|x|^5 + |x-1|^5 = \frac{1}{16}$

14) $|x+\sqrt{2}|^5 + |x-\sqrt{2}|^5 = 8\sqrt{2}$

16) $|x+\sqrt{3}|^5 + |x-\sqrt{3}|^5 = 18\sqrt{3}$

18) $|x+1|^7 + |x-1|^7 = 2$

20) $|x+\sqrt{2}|^7 + |x-\sqrt{2}|^7 = 16\sqrt{2}$

Bài 22: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $|x+1|^2 + |x|^2 + |x-1|^2 \geq 2$

2) $|x+1|^2 + 2|x| + |x-1|^2 \geq 2$

3) $|x+1|^2 + |x|^{2006} + |x-1|^2 \geq 2$

4) $|x+2|^2 + |x|^{11} + |x-2|^2 \geq 8$

5) $|x+3|^2 + |x|^{2006} + |x-3|^2 \geq 18$

6) $|x+4|^2 + 2|x|^2 + |x-4|^2 \geq 32$

7) $|x+1|^2 + |x+2|^2 + |x+3|^2 \geq 2$

8) $|x+1|^2 + |x+2|^2 + |x+3|^2 \geq 2$

9) $|x|^2 + |x+1|^3 + |x+2|^2 \geq 2$

10) $|x-1|^2 + |x-2|^3 + |x-3|^2 \geq 2$

11) $|x|^2 + |x-2|^{11} + |x-4|^2 \geq 8$

12) $|x|^2 + 3|x+6|^3 + |x+6|^2 \geq 18$

13) $|x+1|^3 + |x| + |x-1|^3 \geq 2$

14) $|x+2|^3 + |x|^5 + |x-2|^3 \geq 16$

15) $|x+1|^3 + |x|^{99} + |x-1|^3 \geq 2$

16) $|x|^3 + |x-3|^4 + |x-6|^3 \geq 54$

17) $|x+1|^3 + 9|x+2|^{2004} + |x+3|^3 \geq 218$

18) $|x-1|^3 + |x|^3 + |x+1|^3 + |y-1|^3 + |y|^3 + |y+1|^3 \geq 4$

19) $\left|x - \frac{1}{2}\right|^3 + |x|^{2006} + \left|x + \frac{1}{2}\right|^3 + \left|y - \frac{1}{2}\right|^3 + |y|^{2007} + \left|y + \frac{1}{2}\right|^3 \geq \frac{1}{2}$

20) $|x-1|^3 + 3|x-2|^3 + |x-3|^3 + |y-1|^3 + 3|y-2|^3 + |y-3|^3 \geq 4$

Bài 23: Giải các phương trình sau:

1) $|x+1|^2 + |x|^2 + |x-1|^2 = 2$

2) $|x+1|^2 + 2|x| + |x-1|^2 = 2$

3) $|x+1|^2 + |x|^{2006} + |x-1|^2 = 2$

4) $|x+2|^2 + |x|^{11} + |x-2|^2 = 8$

5) $|x+3|^2 + |x|^{2006} + |x-3|^2 = 18$

6) $|x+4|^2 + 2|x|^2 + |x-4|^2 = 32$

7) $|x+1|^2 + |x+2|^2 + |x+3|^2 = 2$

8) $|x+1|^2 + |x+2|^2 + |x+3|^2 = 2$

9) $|x|^2 + |x+1|^3 + |x+2|^2 = 2$

10) $|x-1|^2 + |x-2|^3 + |x-3|^2 = 2$

11) $|x|^2 + |x-2|^{11} + |x-4|^2 = 8$

12) $|x|^2 + 3|x+6|^3 + |x+6|^2 = 18$

13) $|x+1|^3 + |x| + |x-1|^3 = 2$

14) $|x+2|^3 + |x|^5 + |x-2|^3 = 16$

15) $|x+1|^3 + |x|^{99} + |x-1|^3 = 2$

16) $|x|^3 + |x-3|^4 + |x-6|^3 = 54$

17) $|x+1|^3 + 9|x+2|^{2004} + |x+3|^3 = 2$

18) $|x-1|^3 + |x|^3 + |x+1|^3 + |y-1|^3 + |y|^3 + |y+1|^3 = 4$

19) $\left|x - \frac{1}{2}\right|^3 + |x|^{2006} + \left|x + \frac{1}{2}\right|^3 + \left|y - \frac{1}{2}\right|^3 + |y|^{2007} + \left|y + \frac{1}{2}\right|^3 = \frac{1}{2}$

20) $|x-1|^3 + 3|x-2|^3 + |x-3|^3 + |y-1|^3 + 3|y-2|^3 + |y-3|^3 = 4$

Bài 24: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $|x|^2 + |x+1|^3 < 1$ với $-1 < x < 0$

2) $|x|^2 + |x+1|^3 > 1$ với $x < -1$

3) $|x|^2 + |x+1|^3 > 1$ với $x > 0$

4) $|x|^{20} + |x-1|^{33} < 1$ với $0 < x < 1$

5) $|x|^{20} + |x-1|^{33} > 1$ với $x < 0$

6) $|x|^{20} + |x-1|^{33} > 1$ với $x > 1$

7) $|x|^2 + |x-1|^2 < 1$ với $0 < x < 1$

8) $|x|^2 + |x-1|^2 < 1$ với $x < 0$

9) $|x|^2 + |x-1|^2 < 1$ với $x > 1$

10) $|x|^{20007} + |x-1|^{2007} < 1$ với $0 < x < 1$

11) $|x|^{20007} + |x-1|^{2007} < 1$ với $x < 0$

12) $|x|^{20007} + |x-1|^{2007} < 1$ với $x > 1$

13) $|x+1|^{2006} + |x+2|^{2007} < 1$ với $-2 < x < -1$

14) $|x+1|^{2006} + |x+2|^{2007} > 1$ với $x < -2$

15) $|x+1|^{2006} + |x+2|^{2007} > 1$ với $x > -1$

16) $|x+2006|^{2006} + |x+2007|^{2007} < 1$ với $-2007 < x < -2006$

- 17) $|x + 2006|^{2006} + |x + 2007|^{2007} > 1$ với $x < -2007$
 18) $|x + 2006|^{2006} + |x + 2007|^{2007} > 1$ với $x > -2006$
 19) $|x - 2006|^{2005} + |x - 2005|^{2006} < 1$ với $2005 < x < 2006$
 20) $|x - 2006|^{2005} + |x - 2005|^{2006} > 1$ với $x < 2005$
 21) $|x - 2006|^{2005} + |x - 2005|^{2006} > 1$ với $x > 2006$
 22) $|x + \frac{1}{2}|^{2007} + |x - \frac{1}{2}|^{2006} < 1$ với $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
 23) $|x + \frac{1}{2}|^{2007} + |x - \frac{1}{2}|^{2006} > 1$ với $x < -\frac{1}{2}$
 24) $|x + \frac{1}{2}|^{2007} + |x - \frac{1}{2}|^{2006} > 1$ với $x > \frac{1}{2}$
 25) $|2x|^{2007} + |2x - 1|^{2006} < 1$ với $0 < x < \frac{1}{2}$
 26) $|2x|^{2007} + |2x - 1|^{2006} > 1$ với $x < 0$
 27) $|2x|^{2007} + |2x - 1|^{2006} > 1$ với $x > \frac{1}{2}$
 28) $|3x - 2007|^{999} + |2008 - 3x|^{888} < 1$ với $669 < x < \frac{2008}{3}$
 29) $|3x - 2007|^{999} + |2008 - 3x|^{888} > 1$ với $x < 669$
 30) $|3x - 2007|^{999} + |2008 - 3x|^{888} > 1$ với $x > \frac{2008}{3}$
 31) $|\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}|^{2008} + |\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x|^{2007} < 1$ với $\frac{1}{6} < x < \frac{5}{6}$
 32) $|\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}|^{2008} + |\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x|^{2007} > 1$ với $x < \frac{1}{6}$
 33) $|\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}|^{2008} + |\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x|^{2007} > 1$ với $x > \frac{5}{6}$
 34) $|2x + 1|^{2006} + 2^{2007}|x|^{2007} < 1$ với $-\frac{1}{2} < x < 0$
 35) $|2x + 1|^{2006} + 2^{2007}|x|^{2007} > 1$ với $x < -\frac{1}{2}$
 36) $|2x + 1|^{2006} + 2^{2007}|x|^{2007} > 1$ với $x > 0$

- 37) $|3x - 1|^5 + 3^5|x|^5 < 1$ với $0 < x < \frac{1}{3}$
 38) $|3x - 1|^5 + 3^5|x|^5 > 1$ với $x < 0$
 39) $|3x - 1|^5 + 3^5|x|^5 > 1$ với $x > \frac{1}{3}$
 40) $5^{10}|x + 1|^{10} + |5x + 4|^{20} < 1$ với $-1 < x < -\frac{4}{5}$
 41) $5^{10}|x + 1|^{10} + |5x + 4|^{20} > 1$ với $x < -1$
 42) $5^{10}|x + 1|^{10} + |5x + 4|^{20} > 1$ với $x > -\frac{4}{5}$
 43) $2006^{2006}|x + 1|^{2006} + |2006x + 2007|^{2007} < 1$ với $-\frac{2007}{2006} < x < -1$
 44) $2006^{2006}|x + 1|^{2006} + |2006x + 2007|^{2007} > 1$ với $x < -\frac{2007}{2006}$
 45) $2006^{2006}|x + 1|^{2006} + |2006x + 2007|^{2007} > 1$ với $x > -1$
 46) $|2007 - 2006x|^{2007} + 2006^{2006}|x - 1|^{2006} < 1$ với $1 < x < \frac{2007}{2006}$
 47) $|2007 - 2006x|^{2007} + 2006^{2006}|x - 1|^{2006} > 1$ với $x < 1$
 48) $|2007 - 2006x|^{2007} + 2006^{2006}|x - 1|^{2006} > 1$ với $x > \frac{2007}{2006}$
 49) $|x|^{10} + |2 - x|^{10} < 2^{10}$ với $0 < x < 2$
 50) $|x|^{10} + |2 - x|^{10} > 2^{10}$ với $x < 0$
 51) $|x|^{10} + |2 - x|^{10} > 2^{10}$ với $x > 2$
 52) $|x - 1|^{100} + |x + 1|^{100} < 2^{100}$ với $-1 < x < 1$
 53) $|x - 1|^{100} + |x + 1|^{100} > 2^{100}$ với $x < -1$
 54) $|x - 1|^{100} + |x + 1|^{100} > 2^{100}$ với $x > 1$
 55) $|x|^{1000} + |x + 1000|^{1000} < 1000^{1000}$ với $-1000 < x < 0$
 56) $|x|^{1000} + |x + 1000|^{1000} > 1000^{1000}$ với $x < -1000$
 57) $|x|^{1000} + |x + 1000|^{1000} > 1000^{1000}$ với $x > 0$
 58) $|x|^{999} + |x - 999|^{999} < 999^{999}$ với $0 < x < 999$
 59) $|x|^{999} + |x - 999|^{999} > 999^{999}$ với $x < 0$
 60) $|x|^{999} + |x - 999|^{999} > 999^{999}$ với $x > 999$

- 61) $|x-1|^{100} + |x-101|^{100} < 100^{100}$ với $1 < x < 101$
 62) $|x-1|^{100} + |x-101|^{100} > 100^{100}$ với $x < 1$
 63) $|x-1|^{100} + |x-101|^{100} > 100^{100}$ với $x > 101$
 64) $|x+3|^5 + |x-2|^5 < 5^5$ với $-3 < x < 2$
 65) $|x+3|^5 + |x-2|^5 > 5^5$ với $x < -3$
 66) $|x+3|^5 + |x-2|^5 > 5^5$ với $x > 2$
 67) $|x+11|^{10} + |x+1|^{10} < 10^{10}$ với $-11 < x < -1$
 68) $|x+11|^{10} + |x+1|^{10} > 10^{10}$ với $x < -11$
 69) $|x+11|^{10} + |x+1|^{10} > 10^{10}$ với $x > -1$
 70) $|x+1003|^{2005} + |x-1002|^{2005} < 2005^{2005}$ với $-1003 < x < 1002$
 71) $|x+1003|^{2005} + |x-1002|^{2005} > 2005^{2005}$ với $x < -1003$
 72) $|x+1003|^{2005} + |x-1002|^{2005} > 2005^{2005}$ với $x > 1002$
 73) $|x+999|^{2000} + |x-1001|^{2000} < 2000^{2000}$ với $-999 < x < 1001$
 74) $|x+999|^{2000} + |x-1001|^{2000} > 2000^{2000}$ với $x < -999$
 75) $|x+999|^{2000} + |x-1001|^{2000} > 2000^{2000}$ với $x > 1001$
 76) $|10x|^5 + |x+10|^{10} < 10^{10}$ với $-10 < x < 0$
 77) $|10x|^5 + |x+10|^{10} > 10^{10}$ với $x < -10$
 78) $|10x|^5 + |x+10|^{10} > 10^{10}$ với $x > 0$
 79) $|2x|^{11} + |x-2|^{22} < 2^{22}$ với $0 < x < 2$
 80) $|2x|^{11} + |x-2|^{22} > 2^{22}$ với $x < 0$
 81) $|2x|^{11} + |x-2|^{22} > 2^{22}$ với $x > 2$
 82) $|999x|^{1000} + |x+999|^{2000} < 999^{2000}$ với $-999 < x < 0$
 83) $|999x|^{1000} + |x+999|^{2000} > 999^{2000}$ với $x < -999$
 84) $|999x|^{1000} + |x+999|^{2000} > 999^{2000}$ với $x > 0$
 85) $|4x|^4 + |x+2|^{12} < 2^{12}$ với $-2 < x < 0$
 86) $|4x|^4 + |x+2|^{12} > 2^{12}$ với $x < -2$
 87) $|4x|^4 + |x+2|^{12} > 2^{12}$ với $x < -2$
 88) $|x|^{200} + |10x+100|^{100} < 100^{100}$ với $-10 < x < 0$

89) $|x|^{200} + |10x+100|^{100} > 100^{100}$ với $x < -10$

90) $|x|^{200} + |10x+100|^{100} > 100^{100}$ với $x > 0$

Bài 25: Giải các phương trình sau:

- 1) $|x|^2 + |x+1|^3 = 1$ 2) $|x|^{20} + |x-1|^{33} = 1$
 3) $|x^2| + |x-1|^2 = 1$ 4) $|x|^{2007} + |x-1|^{2007} = 1$
 5) $|x+1|^{2006} + |x+2|^{2007} = 1$ 6) $|x+2006|^{2006} + |x+2007|^{2007} = 1$
 7) $|x-2006|^{2005} + |x-2005|^{2006} = 1$ 8) $|x+\frac{1}{2}|^{2007} + |x-\frac{1}{2}|^{2006} = 1$
 9) $|2x|^{2007} + |2x-1|^{2006} = 1$ 10) $|3x-2007|^{999} + |2008-3x|^{888} = 1$
 11) $|\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}|^{2008} + |\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x|^{2007} = 1$ 12) $|2x+1|^{2006} + 2^{2007}|x|^{2007} = 1$
 13) $|3x-1|^5 + 3^5|x|^5 = 1$ 14) $5^{10}|x+1|^{10} + |5x+4|^{20} = 1$
 15) $2006^{2006}|x+1|^{2006} + |2006x+2007|^{2007} = 1$
 16) $|2007-2006x|^{2007} + 2006^{2006}|x-1|^{2006} = 1$
 17) $|x|^{10} + |2-x|^{10} = 2^{10}$ 18) $|x-1|^{100} + |x+1|^{100} = 2^{100}$
 19) $|x|^{1000} + |x+1000|^{1000} = 1000^{1000}$ 20) $|x|^{999} + |x-999|^{999} = 999^{999}$
 21) $|x-1|^{100} + |x-101|^{100} = 100^{100}$ 22) $|x+3|^5 + |x-2|^5 = 5^5$
 23) $|x+11|^{10} + |x+1|^{10} = 10^{10}$
 24) $|x+1003|^{2005} + |x-1002|^{2005} = 2005^{2005}$
 25) $|x+999|^{2000} + |x-1001|^{2000} = 2000^{2000}$
 26) $|10x|^5 + |x+10|^{10} = 10^{10}$ 27) $|2x|^{11} + |x-2|^{22} = 2^{22}$
 28) $|999x|^{1000} + |x+999|^{2000} = 999^{2000}$
 29) $|4x|^4 + |x+2|^{12} = 2^{12}$ 30) $|x|^{200} + |10x+100|^{100} = 100^{100}$

Bài 26: Giải các bất phương trình sau:

- 1) $|x| > 1$ 2) $|x| > 2$ 3) $|x| < 3$
 4) $|x| < 4$ 5) $|x| \geq 5$ 6) $|x| \geq 6$
 7) $|x| \leq 7$ 8) $|x| \leq 8$ 9) $|x| \geq 0$
 10) $|x| \leq 0$ 11) $|x+1| > 1$ 12) $|x-2| > 2$
 13) $|x+3| < 3$ 14) $|x-4| < 4$ 15) $|x+5| \geq 5$
 16) $|x-6| \geq 6$ 17) $|x+3| \leq 7$ 18) $|x-2| \leq 8$
 19) $|x+9| = 0$ 20) $|x-10| \leq 0$ 21) $1 < |x| < 2$
 22) $3 < |x| < 4$ 23) $0,3 \leq |x| \leq 0,5$ 24) $\frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{4}{5}$

$$25) \frac{4}{3} \leq |x| \leq \frac{8}{2}$$

$$26) 0,2 \leq |x| \leq 0,2$$

$$27) 0,7 \leq |x| \leq 0,7$$

$$28) 1,2 \leq |x| \leq 1,2$$

$$29) 0 \leq |x| \leq 1$$

$$30) 0 < |x| \leq 0,1$$

Bài 27: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$1) A = |x - 3|$$

$$3) A = |6 - x| + 2004$$

$$5) A = |3x - 2| - 16$$

$$7) A = |2x - 3| - 2x - 3$$

$$9) A = |3 - 3x| - 9 - 3x$$

Bài 28: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

$$1) A = -|x|$$

$$3) A = 2004 - |6 - x|$$

$$5) A = -1 - |3x - 2|$$

$$7) A = 4 - |6 - 2x|$$

$$9) A = -2003 - 2003|x - 1|$$

$$11) A = x - |x|$$

$$13) A = -x - |x|$$

$$15) A = 1 + x - |1 - x|$$

$$17) A = -2x - 2|x - 1|$$

$$19) A = -8x - 4 - 4|2x - 1|$$

Bài 29: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$1) A = |x - 2| + |x - 1|$$

$$3) A = |x + 2| + |1 - x|$$

$$5) A = |3x - 2| + |3x - 10|$$

$$7) A = |3x - 2| + |3x - 1|$$

$$9) A = |5 - 3x| + |4 - 3x|$$

$$11) A = |x + 2| + |3 - x|$$

$$13) A = |x + 3| + |9 - x| - 12$$

$$15) A = |2x + 2| + |2x - 5| - 7$$

$$17) A = |3x - 7| + |3x - 1| - 6$$

$$19) A = |x - 2006| + |x - 2007|$$

$$21) A = |2x + 1| + |2 - x| - x$$

$$23) A = |3x + 2| + |1 - 5x| + 2x$$

$$25) A = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x$$

$$2) A = |2x + 1|$$

$$4) A = |2 - x| - 2007$$

$$6) A = |4 - x| + x - 8$$

$$8) A = \left| -x + \frac{4}{3} \right| - x + \frac{4}{3}$$

$$10) A = 2x + 4 + |2x - 3|$$

$$2) A = -|2x + 1|$$

$$4) A = 2007 - |2006 - x|$$

$$6) A = 3 - 5|4 - x|$$

$$8) A = \frac{1}{2} - \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \right|$$

$$10) A = -11 - 11|11 - 11x|$$

$$12) A = x + 1 - |x + 1|$$

$$14) A = -x - 3 - |x - 3|$$

$$16) A = -2x - |2x - 3|$$

$$18) A = -x + \frac{4}{3} - \left| -x + \frac{4}{3} \right|$$

$$20) A = -999x - 111|11 - 9x|$$

$$2) A = |x + 2| + |x - 6|$$

$$4) A = |2x + 3| + |1 - 2x|$$

$$6) A = |4x - 2| + |11 - 4x|$$

$$8) A = |7x - 2| + |7x - 1|$$

$$10) A = |3x - 2| + |3x - 1| - 2005$$

$$12) A = |x - 2| + |7 - x| - 5$$

$$14) A = -1 + |3x - 2| + |3 - 3x|$$

$$16) A = |3x - 7| + |3x + 4| - 11$$

$$18) A = |5x + 2| + |3 + 5x| - 1$$

$$20) A = |997 - x| + |999 - x|$$

$$22) A = |4x + 5| + |2 - x| - 3x$$

$$24) A = |8 - x| + |2 + 3x| - 2x$$

$$26) A = |2x + 1| + |x - 2| - x$$

$$27) A = |x - 6| + |2x + 5| - x$$

$$29) A = |x - 5| + |2 - 3x| - 4x$$

$$31) A = |x - 4| - 2x + |2 - x|$$

$$33) A = |2x - 4| + |5 - 3x| - x$$

$$35) A = \left| \frac{1}{6} - \frac{3}{2}x \right| + \left| \frac{1}{3} + \frac{5}{4}x \right| - \frac{1}{4}x$$

$$28) A = |x - 2| + |2 - 2x| + 3x$$

$$30) A = |2x + 1| - x + |2 - x|$$

$$32) A = |2x + 1| + |x + 2| - 3x - 1$$

$$34) A = \left| 2x + \frac{5}{2} \right| + \left| \frac{3}{2} - x \right| + x$$

$$36) A = \left| \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \right| + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \right| + x$$

Bài 30: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$1) A = |x + 1| + |x + 2| + |3 - 2x|$$

$$2) A = |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| - 3x$$

$$3) A = |1 - x| + |2 - x| + |3 - x| + 3x$$

$$4) A = |x + 999| + |x + 1000| + |x + 10001| - 3x - 1$$

$$5) A = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + 3x - 1$$

$$6) A = |x - 4| + |x - 3| + |2x - 12|$$

$$7) A = |x + 1| + |x + 2| + |3 - 3x| - 5x$$

$$8) A = |x + 1| + 2|x - 2| + |x + 3|$$

$$9) A = |x + 1| + 2|x + 2| + 3|x + 3| - 6x - 2006$$

$$10) A = |x + 1| + |3x - 2| + |x + 7| + x + 1$$

$$11) A = |x - 1| + |x - 2| + |3x + 7| - x + 10$$

$$12) A = |2x + 1| + |2 - 3x| + |x + 7| - 2x + 4$$

$$13) A = |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| - 4x$$

$$14) A = |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| - 2(x + 4)$$

$$15) A = |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| - 4$$

$$16) A = |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| + 2(x + 1)$$

$$17) A = |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4| + 2(2x + 5)$$

$$18) A = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| - 2(2x - 5)$$

$$19) A = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| - 4$$

$$20) A = |x + 2003| + |x + 2005| + |x + 2007| + |x + 2009| - 8$$

Bài 31: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$1) A = |x| + |x - 1| + |x - 2| \quad 2) A = |x + 1| + |x - 1| + |x - 4|$$

$$3) A = |x + 3| + |x + 4| + |x + 5| \quad 4) A = |x - 3| + |x - 1| + |x - 4|$$

$$5) A = |x - 2005| + |x - 2006| + |x - 2007|$$

$$6) A = |x + 2005| + |x + 2006| + |x + 2007|$$

$$7) A = |x| + |x + 1| + |x + 2| + |x + 3|$$

$$8) A = |x| + |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$$

- 9) $A = |x + 2005| + |x + 2006| + |x + 2007| + |x + 2008|$
- 10) $A = |x| + |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + |x + 4|$
- 11) $A = |x| + |y - 1| + |x - 2|$
- 12) $A = |x - 1| + |y| + |x - 2| + |z|$
- 13) $A = |x + 1| + |x - 1| + |y - 4| + |z + 4|$
- 14) $A = |x + 1| + |x - 1| + |y - 2| + |y + 2|$
- 15) $A = |x + 2004| + |y + 2005| + |x + 2006| + |y + 2007|$
- 16) $A = |x| + |y| + |x + 1| + |y + 1| + |x + 2| + |y + 2|$
- 17) $A = |x + 5| + |x + 6| + |x + 7| + |y - 5| + |y - 6| + |y - 7|$
- 18) $A = |x| + |x + 1| + |x + 2| + |y| + |z| + |z + 1| + |z + 2|$
- 19) $A = |x| + |x + 1| + |x + 2| - 2x - 3$
- 20) $A = |x| + |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| - 3x + 6$
- 21) $A = |x|^2 + |x - 2|^{11} + |x - 4|^2$
- 22) $A = |x|^2 + 3|x + 6|^3 + |x + 6|^2$
- 23) $A = |x + 1|^3 + |x| + |x - 1|^3$
- 24) $A = |x + 2|^3 + |x|^5 + |x - 2|^3$
- 25) $A = |x + 1|^3 + |x|^{99} + |x - 1|^3$
- 26) $A = |x|^3 + |x - 3|^4 + |x - 6|^3$
- 27) $A = |x + 1|^3 + 9|x + 2|^{2004} + |x + 3|^3$
- 28) $A = |x - 1|^3 + |x|^3 + |x + 1|^3 + |y - 1|^3 + |y|^3 + |y + 1|^3$
- 29) $A = |x - \frac{1}{2}|^3 + |x|^{2006} + |x + \frac{1}{2}|^3 + |y - \frac{1}{2}|^3 + |y|^{2007} + |y + \frac{1}{2}|^3$
- 30) $A = |x - 1|^3 + 3|x - 2|^3 + |x - 3|^3 + |y - 1|^3 + 3|y - 2|^3 + |y - 3|^3$

Bài 32: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

- 1) $A = |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 98| + |x + 99| + |x + 100|$
- 2) $A = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 98| + |x - 99| + |x - 100|$
- 3) $A = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 2004| + |x - 2005| + |x - 2006|$
- 4) $A = |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 2005| + |x + 2006| + |x + 2007|$
- 5) $A = |x - 100| + |x - 99| + \dots + |x| + \dots + |x + 99| + |x + 100|$
- 6) $A = |x - 2007| + |x - 2006| + \dots + |x| + \dots + |x + 2006| + |x + 2007|$
- 7) $A = |x + 1| + |x + 3| + |x + 5| + \dots + |x + 95| + |x + 97| + |x + 99|$
- 8) $A = |x| + |x + 2| + |x + 4| + \dots + |x + 96| + |x + 98| + |x + 100|$
- 9) $A = |x - 100| + |x - 98| + |x - 96| + \dots + |x + 96| + |x + 98| + |x + 100|$
- 10) $A = |x - 99| + |x - 97| + |x - 95| + \dots + |x + 95| + |x + 97| + |x + 99|$

- 11) $A = |x - 1| + |2x - 1| + |3x - 1| + \dots + |6x - 1| + |7x - 1| + |8x - 1|$
- 12) $A = |1 - 9x| + |1 - 8x| + \dots + |1 - x| + 1 + |1 + x| + \dots + |1 + 8x| + |1 + 9x|$

BÀI 10. BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ (PHẦN NÂNG CAO)

DẠNG TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT PHÂN THỨC BẰNG CÁCH PHÂN TÍCH GIẢ THIẾT RA NHÂN TỬ

Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức:

- 1) $A = \frac{3x - 2y}{3x + 2y}$ biết $\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 20xy \\ x < 2y \end{cases}$
- 2) $B = \frac{2a - b}{3a - b} + \frac{5b - a}{3a + b}$ biết $\begin{cases} 10a^2 - 3b^2 + ab = 0 \\ b > a > 0 \end{cases}$
- 3) $C = \frac{4ab}{4a^2 - b^2}$ biết $\begin{cases} 4a^2 + b^2 = 5ab \\ 4a > b > 0 \end{cases}$
- 4) $D = \frac{x + y}{x - y}$ biết $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy \\ 0 < x < 2y \end{cases}$
- 5) $E = \frac{3x + y}{7y - x} + \frac{6x - 9y}{2x + y}$ biết $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 7xy \\ 0 < x < 2y \end{cases}$
- 6) $F = \frac{a - b}{2a + b} - \frac{3a - b}{a - 2b}$ biết $\begin{cases} 7a^2 - 15ab + 2b^2 = 0 \\ 2b > a > 0 \end{cases}$
- 7) $G = \frac{4y + 2x}{5y - 7x} + \frac{3x - 2y}{10y - 4x}$ biết $3x^2 - 7xy + 4y^2 = 0$

DẠNG TÍNH GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC BẰNG PHÉP THẾ

Bài 2:

- 1) Cho a, b, c thỏa: $abc \neq 0$ và $ab + bc + ca = 0$.

$$\text{Tính } A = \frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{abc}$$

- 2) Cho $abc \neq 0$ thỏa: $ab - bc - ca = 0$. Tính $B = \frac{(a + b)(b - c)(c - a)}{abc}$

- 3) Cho $abc \neq 0$ thỏa: $ca - ab - bc = 0$. Tính $C = \frac{(a - b)(b - c)(c + a)}{abc}$

- 4) Cho $abc \neq 0$ thỏa: $bc - ab - ac = 0$. Tính $D = \frac{(a - b)(b + c)(c - a)}{abc}$

- 5) Cho $abc \neq 0$ thỏa: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Tính $E = \frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{abc}$

6) Cho $abc \neq 0$ thỏa: $2ab + 6bc + 3ac = 0$.

Tính $F = \frac{(a+2b)(2b+3c)(3c+a)}{6abc}$

7) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a + b + c = 0$.

Tính $A = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$

8) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a + b - c = 0$.

Tính $B = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$

9) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a - b + c = 0$.

Tính $C = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$

10) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a - b - c = 0$.

Tính $D = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$

11) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Tính $E = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2} + \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2} + \frac{a^2b^2c^2}{c^2a^2 + a^2b^2 - b^2c^2}$

12) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.

Tính $F = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2} + \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2} + \frac{a^2b^2c^2}{c^2a^2 + a^2b^2 - b^2c^2}$

13) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.

Tính $G = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2} + \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2} + \frac{a^2b^2c^2}{c^2a^2 + a^2b^2 - b^2c^2}$

14) $A = \frac{5x-y}{3x+7} - \frac{3y-2x}{2y-7}$ biết $2x - y = 7$

15) $B = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$ biết $\begin{cases} 10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0 \\ 9a^2 - b^2 \neq 0 \end{cases}$

16) $C = \frac{2a-1}{3a-1} + \frac{5-a}{3a+1}$ biết $\begin{cases} 10a^2 + 5a = 3 \\ 9a^2 - 1 \neq 0 \end{cases}$

17) $D = \frac{6x-8y}{x+y} + \frac{3y-2x}{5x-y}$ biết $\begin{cases} 3x^2 - 65xy + 16y^2 = 0 \\ y \neq -x; y \neq 5x \end{cases}$

18) $E = \frac{a-3}{a+5} + \frac{2a-3}{5-a}$ biết $\begin{cases} 3a^2 + 60a - 95 = 0 \\ a^2 \neq 25 \end{cases}$

19) $F = \frac{6x-9y}{x+10y} - \frac{7x-8y}{5y-4x}$ biết $\begin{cases} 131x^2 + 125y^2 = 230xy \\ x+10y \neq 0; 5y-4x \neq 0 \end{cases}$

20) Cho $ax + by + cz = 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2} = \frac{1}{a+b+c}$

21) Cho $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a + b + c = \frac{1}{2000} \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2} = 2000$

22) Cho $\begin{cases} ax - by + cz = 0 \\ a + b + c = \frac{1}{1999} \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{ab(x+y)^2 + bc(y+z)^2 + ca(z-x)^2} = 1999$

23) Cho $\begin{cases} ax + by - cz = 0 \\ a + b - c = 1000 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\frac{ax^2 + by^2 - cz^2}{-bc(y-z)^2 - ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2} = \frac{1}{1000}$

24) Cho $\begin{cases} by + cz = ax \\ a + b + c = 2006 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{ab(x+y)^2 + bc(y-z)^2 + ca(z+x)^2} = \frac{1}{2006}$

25) Cho $\begin{cases} ax - by + cz = 0 \\ a - b + c = \frac{1}{1080} \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\frac{ax^2 - by^2 + cz^2}{ca(z-x)^2 - bc(y-z)^2 - ab(x-y)^2} = 1080$

26) Cho $\begin{cases} by + cz - ax = 0 \\ b + c - a = 1980 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\frac{by^2 + cz^2 - ax^2}{bc(y-z)^2 - ca(z-x)^2 - ab(x-y)^2} = \frac{1}{1980}$

DẠNG ĐỐI XỨNG VÒNG QUANH

Bài 3: Tính (rút gọn)

$$1) \frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)}$$

$$2) \frac{x}{(x-y)(z-x)} + \frac{y}{(y-z)(x-y)} + \frac{z}{(z-x)(y-z)}$$

$$3) \frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$$

$$4) \frac{1}{(x-y)(x-z)(x+y+z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)(x+y+z)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)(x+y+z)}$$

$$5) \frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2 - zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)}$$

$$6) \frac{1}{(b-c)(a^2 + ac - b^2 - bc)} + \frac{1}{(c-a)(b^2 + ab - c^2 - ca)} + \frac{1}{(a-b)(c^2 + cb - a^2 - ab)}$$

$$7) \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} - \frac{2}{a-b} - \frac{2}{b-c} - \frac{2}{c-a}$$

$$8) \frac{b+c}{(a+b)(a-c)} + \frac{a-c}{(b+c)(a+b)} + \frac{a+b}{(b+c)(a-c)} + \frac{2}{a+b} - \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c-a}$$

$$9) \frac{a+b}{(c-b)(a+c)} + \frac{a-c}{(b-a)(b-c)} + \frac{b+c}{(b-a)(a+c)} + \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c}$$

$$10) \frac{a-b}{(b+c)(a+c)} + \frac{c-b}{(a+b)(a+c)} + \frac{c-a}{(a+b)(b+c)} - \frac{2}{a+b} + \frac{2}{a+c}$$

$$11) \frac{a-c}{(a-b)(b-c)} + \frac{a+b-2c}{(b-c)(a-c)} + \frac{b-c}{(c-a)(b-a)} - \frac{2}{a-b} - \frac{2}{b-c}$$

$$12) \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$$

$$13) \frac{a^3 + b^3 - c^3 + 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca}$$

$$14) \frac{a^3 - b^3 + c^3 + 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc - ca}$$

$$15) \frac{a^3 - b^3 - c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ca}$$

$$16) \frac{a^3 + 8b^3 + 27c^3 - 18abc}{a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 2ab - 3ac - 6bc}$$

$$17) \frac{8a^3 + 27b^3 + 64c^3 - 72abc}{4a^2 + 9b^2 + 16c^2 - 6ab - 8ac - 12bc}$$

$$18) \frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$19) \frac{bc}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{2ca}{(b+c)(b+2a)} + \frac{2ab}{(c+2a)(c+b)} + \frac{4abc}{(2a+b)(b+c)(c+2a)}$$

$$20) \frac{2bc}{(a+2b)(a+c)} + \frac{ca}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{2ab}{(c+a)(c+2b)} + \frac{4abc}{(a+2b)(2b+c)(c+a)}$$

$$21) \frac{2bc}{(a+b)(a+2c)} + \frac{2ca}{(b+2c)(b+a)} + \frac{ab}{(2c+a)(2c+b)} + \frac{4abc}{(a+b)(b+2c)(2c+a)}$$

$$22) \frac{bc}{(3a+b)(3a+c)} + \frac{3ca}{(b+c)(b+3a)} + \frac{3ab}{(c+3a)(c+b)} + \frac{6abc}{(3a+b)(b+c)(c+3a)}$$

$$23) \frac{3bc}{(a+3b)(a+c)} + \frac{ca}{(3b+c)(3b+a)} + \frac{3ab}{(c+a)(c+3b)} + \frac{6abc}{(a+3b)(3b+c)(c+a)}$$

$$24) \frac{3bc}{(a+b)(a+3c)} + \frac{3ca}{(b+3c)(b+a)} + \frac{ab}{(3c+a)(3c+b)} + \frac{6abc}{(a+b)(b+3c)(3c+a)}$$

$$25) \frac{2ac}{(a+2b)(b+2c)} + \frac{2ab}{(b+2c)(c+2a)} + \frac{2bc}{(c+2a)(a+2b)} + \frac{9abc}{(a+2b)(b+2c)(c+2a)}$$

$$26) \frac{3ab}{(b+3c)(c+3a)} + \frac{3bc}{(c+3a)(a+3b)} + \frac{3ca}{(a+3b)(b+3c)} + \frac{28abc}{(a+3b)(b+3c)(c+3a)}$$

$$27) \frac{4ab}{(b+4c)(c+4a)} + \frac{4bc}{(c+4a)(a+4b)} + \frac{4ca}{(a+4b)(b+4c)} + \frac{65abc}{(a+4b)(b+4c)(c+4a)}$$

$$28) \frac{4bc}{(a+2b)(a+2c)} + \frac{ca}{(b+c)(2b+a)} + \frac{ab}{(2c+a)(c+b)} + \frac{4abc}{(a+2b)(b+c)(2c+a)}$$

$$29) \frac{bc}{(2a+b)(a+c)} + \frac{4ca}{(b+2c)(b+2a)} + \frac{ab}{(c+a)(2c+b)} + \frac{4abc}{(2a+b)(b+2c)(c+a)}$$

$$30) \frac{bc}{(a+b)(2a+c)} + \frac{ca}{(2b+c)(b+a)} + \frac{4ab}{(c+2a)(c+2b)} + \frac{4abc}{(a+b)(2b+c)(c+2a)}$$

$$31) \frac{3bc}{(a+3b)(a+c)} + \frac{ca}{(3b+c)(3b+a)} + \frac{3ab}{(c+a)(c+3b)} + \frac{6abc}{(a+3b)(3b+c)(c+a)}$$

$$32) \frac{3bc}{(a+b)(a+3c)} + \frac{3ca}{(b+3c)(b+a)} + \frac{ab}{(3c+a)(3c+b)} + \frac{6abc}{(a+b)(b+3c)(3c+a)}$$

$$33) \frac{9bc}{(a+3b)(a+3c)} + \frac{ca}{(b+c)(3b+a)} + \frac{ab}{(3c+a)(c+b)} + \frac{6abc}{(a+3b)(b+c)(3c+a)}$$

$$34) \frac{bc}{(3a+b)(a+c)} + \frac{9ca}{(b+3c)(b+3a)} + \frac{ab}{(c+a)(3c+b)} + \frac{6abc}{(3a+b)(b+3c)(c+a)}$$

35) $\frac{bc}{(a+b)(3a+c)} + \frac{ca}{(3b+c)(b+a)} + \frac{9ab}{(c+3a)(c+3b)} + \frac{6abc}{(a+b)(3b+c)(c+3a)}$

36) $\frac{2ab}{(a+3c)(3c+2b)} + \frac{3ca}{(2b+3c)(2b+a)} + \frac{6bc}{(a+2b)(a+3c)} + \frac{12abc}{(a+2b)(2b+3c)(3c+a)}$

37) $\frac{6bc}{(2a+3b)(a+2c)} + \frac{8ca}{(3b+4c)(3b+2a)} + \frac{3ab}{(2c+a)(4c+3b)} + \frac{24abc}{(2a+3b)(3b+4c)(2c+a)}$

38) $\frac{2bc}{(3a+2b)(2a+c)} + \frac{9ac}{(4b+3c)(2b+3a)} + \frac{8ab}{(c+2a)(3c+4b)} + \frac{24abc}{(3a+2b)(4b+3c)(c+2a)}$

39) $\frac{bc}{(a-b)(c-a)} + \frac{ca}{(b+c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(b+c)} + \frac{2abc}{(a-b)(b+c)(a-c)}$

40) $\frac{bc}{(a+b)(a-c)} + \frac{ac}{(a+b)(b-c)} + \frac{ab}{(a-c)(c-b)} + \frac{2abc}{(a+b)(b-c)(a-c)}$

41) $\frac{bc}{(a+c)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)} + \frac{ab}{(a+c)(c-b)} + \frac{2abc}{(a-b)(c-b)(a+c)}$

42) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

43) $\frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)}$

44) $\frac{mbc+n}{(a-b)(a-c)} + \frac{mca+n}{(b-c)(b-a)} + \frac{mab+n}{(c-a)(c-b)}$

45) $\frac{a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

46) $\frac{a^3b-ab^3+b^3c-bc^3+c^3a-ca^3}{a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2}$

47) $\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)}$

48) $\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{a+b}{a-b}$

49) Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{b-c}{b+c} \cdot \frac{c-a}{c+a}$

50) Đặt $x = \frac{a-b}{a+b}$; $y = \frac{b-c}{b+c}$; $z = \frac{c-a}{c+a}$.

Chứng minh rằng: $(x+1)(y+1)(z+1) = (1-x)(1-y)(1-z)$

51) Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c thỏa mãn đẳng thức:

$$\frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{c+a} + \frac{ca}{a+b} = \frac{ab}{c+a} + \frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{b+c}$$

Chứng minh rằng: tam giác ABC cân.

52) Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 = \frac{(a^2-b^2)^2 + (b^2-c^2)^2 + (c^2-a^2)^2}{2}$$

53) Cho a, b, c thỏa:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0 \text{ và } \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$$

Chứng minh rằng: $a = b = c$.

54) Cho a, b, c thỏa: $(a+2b)(2b+3c)(3c+a) \neq 0$ và

$$\frac{a^2}{a+2b} + \frac{4b^2}{2b+3c} + \frac{9c^2}{3c+a} = \frac{a^2}{2b+3c} + \frac{4b^2}{3c+a} + \frac{9c^2}{a+2b}$$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2}$.

55) Cho a, b, c thỏa: $(2a+3b)(3b+4c)(2c+a) \neq 0$ và

$$\frac{4a^2}{2a+3b} + \frac{9b^2}{3b+4c} + \frac{8c^2}{2c+a} = \frac{4a^2}{3b+4c} + \frac{9b^2}{4c+2a} + \frac{16c^2}{2a+3b}$$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{6} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3}$.

56) Cho $(a-b)(b+2c)(2c-a) \neq 0$ và $\frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{b+2c} + \frac{4c^2}{a-2c}$

$$= -\frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{a-2c} + \frac{4c^2}{a-b}. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{a}{2} = \frac{b}{-2} = \frac{c}{-1}.$$

57) Cho $(a-2b)(2b-3c)(3c+a) \neq 0$ và

$$\frac{a^2}{a-2b} - \frac{4b^2}{2b-3c} + \frac{9c^2}{3c+a} = \frac{a^2}{3c-2b} + \frac{4b^2}{3c+a} + \frac{9c^2}{a-2b}$$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{6} = \frac{b}{-3} = \frac{c}{2}$.

58) Tính $\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{a+b}{a-b}$

59) Chứng minh rằng: $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2}{(c-a)^2} \geq 2$

- 60) Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + b^2}{(a - b)^2} + \frac{b^2 + c^2}{(b - c)^2} + \frac{c^2 + a^2}{(c - a)^2} \geq \frac{5}{2}$
- 61) Chứng minh rằng: $\frac{ab}{(a - b)^2} + \frac{bc}{(b - c)^2} + \frac{ca}{(c - a)^2} \geq -\frac{1}{4}$
- 62) Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + ab + b^2}{(a - b)^2} + \frac{b^2 + bc + c^2}{(b - c)^2} + \frac{c^2 + ca + a^2}{(c - a)^2} \geq \frac{9}{4}$
- 63) Chứng minh rằng: $\frac{a^2 - ab + b^2}{(a - b)^2} + \frac{b^2 - bc + c^2}{(b - c)^2} + \frac{c^2 - ca + a^2}{(c - a)^2} \geq \frac{11}{4}$
- 64) Chứng minh rằng: $\frac{a^3 - b^3}{(a - b)^3} + \frac{b^3 - c^3}{(b - c)^3} + \frac{c^3 - a^3}{(c - a)^3} \geq \frac{9}{4}$
- 65) Cho a, b, c đôi một khác nhau.
- a) Tính $\frac{ab}{(b - c)(c - a)} + \frac{bc}{(c - a)(a - b)} + \frac{ca}{(a - b)(b - c)}$
- b) Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{(b - c)^2} + \frac{b^2}{(c - a)^2} + \frac{c^2}{(a - b)^2} \geq 2$.

DẠNG KHAI THÁC GIẢI THIẾT BẰNG CÁCH VẬN DỤNG PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Bài 4:

- 1) Cho a, b, c khác 0 và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$.
Chứng minh rằng: $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$
- 2) Cho a, b, c khác 0 và $\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3a + 2b + c}$.
Chứng minh rằng: $(3a + 2b)(2b + c)(c + 3a) = 0$
- 3) Cho a, b, c khác 0 và $\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{4c} = \frac{1}{2a + 3b + 4c}$.
Chứng minh rằng: $(2a + 3b)(3b + 4c)(2c + a) = 0$
- 4) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $\frac{1}{a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{5c} = \frac{1}{a + 3b + 5c}$.
Chứng minh: $(a + 3b)(3b + 5c)(5c + a) = 0$
- 5) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $\frac{1}{3a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{5c} = \frac{1}{3a + 4b + 5c}$.
Chứng minh rằng: $(3a + 4b)(4b + 5c)(5c + 3a) = 0$
- 6) Cho a, b, c khác 0 và $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{a + 2b + 2c}$.
Chứng minh rằng: $(a + 2b)(b + c)(2c + a) = 0$

- 7) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{2a + b + 2c}$.
Chứng minh rằng: $(2a + b)(b + 2c)(c + a) = 0$

- 8) Cho a, b, c khác 0 và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = \frac{2}{2a + 2b + c}$.
Chứng minh rằng: $(a + b)(2b + c)(c + 2a) = 0$

- 9) Cho x, y, z khác 0 và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$.
Tính $P = (x^{25} + y^{25})(y^3 + z^3)(z^{2006} - x^{2006})$

- 10) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1$.
Tính $Q = (a^{23} + b^{23})(b^5 + c^5)(c^{2005} + a^{2005})$

- 11) Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa: $\begin{cases} a + b + c \neq 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c} \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^{2005}} + \frac{1}{b^{2005}} + \frac{1}{c^{2005}} = \frac{1}{a^{2005} + b^{2005} + c^{2005}}$

- 12) Cho a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thỏa: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a - b + c}$. Tính $a^3 + c^3$

- 13) Cho a > 0, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thỏa: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b - c}$. Chứng minh b < 0.

- 14) Cho x, y, z là ba số khác 0 thỏa: $\begin{cases} x + y + z = 2006 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2006} \end{cases}$.

Chứng minh rằng trong ba số x, y, z tồn tại hai số đối nhau.

- 15) Cho ba số a, b, c thỏa: $a + b + c = 3$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$.
Chứng minh rằng trong ba số a, b, c tồn tại một số bằng 3.

- 16) Tìm x, y, z biết: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \\ 2x^2 + y = 1 \end{cases}$

- 17) Tìm x, y, z biết: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y^2 - z = \frac{3}{2} \end{cases}$

18) Tìm x, y, z biết:
$$\begin{cases} x + y + z = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \\ 8x^2 + 5z = 3 \end{cases}$$

19) Tìm x, y, z biết:
$$\begin{cases} x + y + z = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -2 \\ x^2 + 2y = -1 \end{cases}$$

20) Cho
$$\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$
 Tính $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

21) Cho
$$\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) - z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -2 \\ x^3 + y^3 - z^3 = 1 \end{cases}$$
 Tính $B = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$.

22) Cho
$$\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right) - y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = -2 \\ x^3 - y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$
 Tính $C = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

23) Cho
$$\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ -x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = -2 \\ x^3 - y^3 - z^3 = 1 \end{cases}$$
 Tính $D = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$.

24) Cho
$$\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ y\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) - x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = -2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$
 Tính $E = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$.

25) Cho
$$\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right) - y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = -2 \\ y^3 - z^3 - x^3 = 1 \end{cases}$$
 Tính $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$.

26) Cho a, b, c thỏa: $abc = 1$ và $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
Chứng minh rằng: $(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 0$.

27) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $abc = 8$ và $a + b + c = \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c}$.
Chứng minh rằng: $(a - 2)(b - 2)(c - 2) = 0$.

28) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $abc = 27$ và $a + b + c = \frac{9}{a} + \frac{9}{b} + \frac{9}{c}$.
Chứng minh rằng: $(a - 3)(b - 3)(c - 3) = 0$.

29) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $abc = 64$ và $a + b + c = \frac{16}{a} + \frac{16}{b} + \frac{16}{c}$.
Chứng minh rằng: $(a - 4)(b - 4)(c - 4) = 0$.

30) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $abc = 2$ và $2a + 2b + c = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c}$.
Chứng minh rằng: $(a - 1)(b - 1)(c - 2) = 0$.

31) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $abc = 3$ và $3a + b + 3c = \frac{3}{a} + \frac{9}{b} + \frac{3}{c}$.
Chứng minh rằng: $(a - 1)(b - 3)(c - 1) = 0$.

32) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $2abc = 1$ và $2a + b + c = \frac{1}{2a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
Chứng minh rằng: $(2a - 1)(b - 1)(c - 1) = 0$.

33) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $3abc = 2$ và $2a + 6b + c = \frac{2}{a} + \frac{2}{3b} + \frac{4}{c}$.
Chứng minh rằng: $(a - 1)(3b - 1)(c - 2) = 0$.

34) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $abc = 6$ và $6a + 3b + 2c = \frac{6}{a} + \frac{12}{b} + \frac{18}{c}$.
Chứng minh rằng: $(a - 1)(b - 2)(c - 3) = 0$.

35) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $abc = 24$ và $3a + 4b + 6c = \frac{48}{a} + \frac{36}{b} + \frac{24}{c}$.
Chứng minh rằng: $(a - 4)(b - 3)(c - 2) = 0$.

36) Cho a, b, c thỏa: $abc = \frac{2}{9}$ và $3a + 6b + 2c = \frac{4}{3a} + \frac{2}{3b} + \frac{2}{c}$.
Chứng minh rằng: $(3a - 2)(3b - 1)(c - 1) = 0$.

37) Cho ba số x, y, z khác 0 thỏa:
$$\begin{cases} xyz = 1 \\ x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \end{cases}$$

Tính $A = (x^{19} - 1)(y^5 - 1)(z^{2006} - 1)$.

38) Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa:
$$\begin{cases} b = \frac{1}{ac} \\ a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \end{cases}$$

Chứng minh rằng: trong ba số a, b, c có một số bằng 1.

39) Cho x, y, z là 3 số khác 0 thỏa:

$$\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} = 1.$$

Chứng minh rằng: trong ba số có một số là tổng của hai số còn lại.

40) Cho $\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x + y \neq z \\ y + z \neq x \end{cases}$ và $\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} = 1.$

Chứng minh rằng: $x + y + z = 0$.

41) Cho $\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x + y + z \neq 0 \\ y + z \neq x \end{cases}$ và $\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} = 1.$

Chứng minh rằng: $y = x + z$.

42) Cho $\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x + y + z \neq 0 \\ x + z \neq y \end{cases}$ và $\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} = 1.$

Chứng minh rằng: $z = x + y$.

DẠNG HOÁN VỊ VÒNG

Bài 5:

1) Cho $xyz = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$

2) Cho $abc = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1.$

3) Cho $xyz = 8$. Tính $A = \frac{4}{4+2x+xy} + \frac{4}{4+2y+yz} + \frac{4}{4+2z+zx}$

4) Cho $abc = 27$. Tính $B = \frac{3a}{ab+3a+9} + \frac{3b}{bc+3b+9} + \frac{3c}{ca+3c+9}$

5) Cho $abc = 2000$.

Tính $C = \frac{2000a}{ab+2000a+2000} + \frac{b}{bc+b+2000} + \frac{c}{ac+c+1}$

6) Cho $xyz = 2003$.

Tính $D = \frac{x}{xy+x+2003} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{2003z}{zx+2003z+2003}$

7) Cho $abc = 2006$.

Tính $E = \frac{1}{1+a+ab} + \frac{2006}{2006+2006b+bc} + \frac{2006}{2006+c+ca}$

8) Cho $xyz = 100$.

Tính $F = \frac{10}{10+x+xy} + \frac{10}{10+10y+yz} + \frac{100}{100+10z+zx}$

9) Cho $abc = 24$. Tính $G = \frac{3a}{ab+3a+6} + \frac{4b}{bc+4b+12} + \frac{2c}{ca+2c+8}$

10) Cho $xyz = 60$. Tính $H = \frac{12}{xy+4x+12} + \frac{20}{yz+5y+20} + \frac{15}{zx+3z+15}$

11) Cho $abc = 135$.

Tính $K = \frac{5a}{ab+5a+15} + \frac{9b}{bc+9b+45} + \frac{3c}{ca+3c+27}$

12) Cho $xyz = 560$.

Tính $L = \frac{56}{xy+8x+56} + \frac{80}{yz+10y+80} + \frac{70}{zx+7z+70}$

13) Cho $xyzt = 1$. Tính $M = \frac{x}{xyz+xy+x+1} + \frac{y}{yzt+yz+y+1} +$

$\frac{z}{ztx+zt+z+1} + \frac{t}{txy+tx+t+1}$

14) Cho $xyzt = 16$. Tính $N = \frac{4x}{xyz+2xy+4x+8} + \frac{4y}{yzt+2yz+4y+8} +$

$\frac{4z}{ztx+2zt+4z+8} + \frac{4t}{txy+2tx+4t+8}$

15) Cho $xyzt = 24$. Tính $P = \frac{6x}{xyz+3xy+6x+6} + \frac{12y}{yzt+4yz+12y+24} +$

$\frac{4x}{ztx+zt+4z+12} + \frac{2t}{txy+2tx+2t+8}$

DẠNG HẸNG ĐẲNG THỨC BẬC HAI CHO BA SỐ

Bài 6:

1) Cho a, b, c là ba số thỏa: $\begin{cases} a+b+c=9 \\ a^2+b^2+c^2=53 \end{cases}$. Tính $ab+bc+ca$

2) Cho a, b, c là ba số thỏa: $\begin{cases} a+b+c=8 \\ a^2+b^2+c^2=30 \end{cases}$. Tính $ab+bc+ca$

3) Cho $\begin{cases} a+b+c=7 \\ ab+bc+ca=9 \end{cases}$. Tính $a^2+b^2+c^2$

4) Cho $\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+zx=0 \end{cases}$. Tính $x^2+y^2+z^2$

5) Cho a, b, c là ba số dương thỏa:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \\ ab+bc+ca=9 \end{cases}$$

Tính $a^2+b^2+c^2; (a+b+c)^2; a+b+c$

6) Cho $a > b, c > 0$ thỏa: $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=(a+b)^2+(b+c)^2+(c-a)^2 \\ ca-ab-bc=16 \end{cases}$

Tính $a-b+c$

7) Cho $a > 0, b > c$ thỏa: $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 \\ ab-bc-ca=4 \end{cases}$

Tính $a+b-c$

8) Cho $a > b, c < 0$ thỏa: $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=(a+b)^2+(b-c)^2+(c+a)^2 \\ bc-ab-ca=25 \end{cases}$

Tính $a-b-c$

9) Cho $\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \end{cases}$. Tính $x^2+y^2+z^2$

10) Cho $\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x-y+z=-1 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \end{cases}$. Tính $x^2+y^2+z^2$

11) Cho $\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x+y-z=-2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0 \end{cases}$. Tính $x^2+y^2+z^2$

12) Cho $\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x-y-z=-3 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0 \end{cases}$. Tính $x^2+y^2+z^2$

13) Cho $\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x+2y+3z=4 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=0 \end{cases}$. Tính $x^2+4y^2+9z^2$

14) Cho $\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ 2x+y+3z=-4 \\ \frac{1}{2x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{3z}=0 \end{cases}$. Tính $4x^2+y^2+9z^2$

15) Cho $\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ x-2y+3z=5 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=0 \end{cases}$. Tính $x^2+4y^2+9z^2$

16) Cho $\begin{cases} x, y, z \neq 0 \\ 4x+5y-6z=-5 \\ \frac{1}{4x}+\frac{1}{5y}-\frac{1}{6z}=0 \end{cases}$. Tính $16x^2+25y^2+36z^2$

17) Cho $\begin{cases} a, b, c \neq 0 \\ a+b+c=abc \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2 \end{cases}$

Tính $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

18) Cho $\begin{cases} a, b, c \neq 0 \\ a-b+c=-abc \\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2 \end{cases}$. Tính $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

19) Cho $\begin{cases} a, b, c \neq 0 \\ a + b - c = -abc \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = -2 \end{cases}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

20) Cho $\begin{cases} a, b, c \neq 0 \\ a - b - c = abc \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 6 \end{cases}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

21) Cho $\begin{cases} a, b, c \neq 0 \\ a + b + c = 2abc \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 \end{cases}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

22) Cho $\begin{cases} a, b, c \neq 0 \\ a + b + c = -abc \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

23) Cho $\begin{cases} a, b, c \neq 0 \\ a + b + c = -3abc \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -1 \end{cases}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

24) Cho $\begin{cases} a, b, c \neq 0 \\ a + b + c = -\frac{abc}{2} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

25) Cho $\begin{cases} a, b, c \neq 0 \\ 6(a + b + c) = abc \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3} \end{cases}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

26) Cho $\begin{cases} a, b, c \neq 0 \\ 4(a + b + c) = abc \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{-3}{4} \end{cases}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

27) Cho $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \end{cases}$. Tính $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

28) Cho $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1 \end{cases}$. Tính $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}$

29) Cho $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = -1 \\ \frac{a}{x} - \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \end{cases}$. Tính $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

30) Cho $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 2 \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = 0 \end{cases}$. Tính $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

31) Cho $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = -2 \\ \frac{a}{x} - \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = 0 \end{cases}$. Tính $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

32) Cho $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{2y}{b} + \frac{3z}{c} = 3 \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{2y} + \frac{c}{3z} = 0 \end{cases}$. Tính $\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{b^2} + \frac{9z^2}{c^2}$

33) Cho $\begin{cases} \frac{x}{3a} + \frac{y}{2b} + \frac{z}{c} = -3 \\ \frac{3a}{x} + \frac{2b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \end{cases}$. Tính $\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{4b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

34) Cho $\begin{cases} \frac{x}{3a} + \frac{y}{4b} + \frac{z}{5c} = 6 \\ \frac{3a}{x} + \frac{4b}{y} + \frac{5c}{z} = 0 \end{cases}$. Tính $\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{16b^2} + \frac{z^2}{25c^2}$

- 35) Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $2(x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$
- 36) Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng: $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$
- 37) Cho $x - y + z = 0$. Chứng minh rằng: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$
- 38) Cho $a - b + c = 0$. Chứng minh rằng: $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$

39) Cho $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 14 \end{cases}$. Tính $a^4 + b^4 + c^4$

40) Cho $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 10 \end{cases}$. Tính $a^4 + b^4 + c^4$

41) Cho $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 12 \end{cases}$. Tính $a^4 + b^4 + c^4$

42) Cho $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 16 \end{cases}$. Tính $a^4 + b^4 + c^4$

43) Cho $\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 20 \end{cases}$. Tính $a^4 + 16b^4 + 81c^4$

44) Cho $\begin{cases} a - 2b + 3c = 0 \\ a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 18 \end{cases}$. Tính $a^4 + 16b^4 + 81c^4$

45) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Chứng minh rằng: $(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)^2 = 2(x^4y^4 + y^4z^4 + z^4x^4)$

46) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$.

Chứng minh rằng: $(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)^2 = 2(x^4y^4 + y^4z^4 + z^4x^4)$

47) Cho $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Chứng minh rằng: $(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)^2 = 2(x^4y^4 + y^4z^4 + z^4x^4)$

48) Cho $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$.

Chứng minh rằng: $(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)^2 = 2(x^4y^4 + y^4z^4 + z^4x^4)$

49) Cho $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$.

Tính $S = (x - 1)^{1999} + y^{2003} + (z + 1)^{2006}$

50) Cho $x - y + z = 0$ và $xy + yz - zx = 0$.

Tính $S = (x + y)^3 - (z - 1)^8 + 2(x + 1/2)^4$

51) Cho $x + y - z = 0$ và $yz + zx - xy = 0$.

Tính $S = (x - z - 2)^3 + \frac{1}{7}(x + y - 7)^3 - \frac{4}{9}(y + z - \frac{3}{2})^4$

52) Cho $x - y - z = 0$ và $xy - yz + zx = 0$. Tính $S = \frac{(x - 1)^{1999} + (y - 3)^{2007} + z^3}{4 + (x + y - z)^2 - z^3}$

53) Cho $x + 2y + 3z = 0$ và $2xy + 6yz + 3zx = 0$.

Tính $S = \frac{(x - 1)^{1999} - (1 - y)^{2007} + (3z - 1)^{1997}}{(x + 1)^{1990} + 2(y - z)^{17} + y^5 + 2}$

DẠNG HẰNG ĐẲNG THỨC BẬC 3

Bài 7:

1) Cho a, b là hai số bất kì. Chứng minh các hằng đẳng thức sau:

a) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$.

b) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$.

c) $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$.

2) Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

3) Cho $a + b - c = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 - c^3 = -3abc$

4) Cho $a - b + c = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 - b^3 + c^3 = -3abc$

5) Cho $a - b - c = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$.

6) Cho $a + b + c + d = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c + d)(ab - cd)$

7) Cho $a - b + c - d = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 - b^3 + c^3 - d^3 = 3(c - d)(cd - ab)$

8) Cho $c - a = b + d$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 - c^3 + d^3 = 3(d - c)(ab + cd)$

9) Cho $a + b + c = d$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 - d^3 = 3(c - d)(ab + cd)$

10) Cho $a + d = b - c$. Chứng minh rằng: $a^3 - b^3 + c^3 + d^3 = 3(a - b)(ab + dc)$

11) Cho $2a + b + c = 0$. Chứng minh rằng: $2a^3 + b^3 + c^3 = 3a(a + b)(c - b)$

12) Cho $2a + b + c = 0$. Chứng minh rằng: $2a^3 + b^3 + c^3 = 3a(a + c)(b - c)$

13) Cho $a + 2b + c = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 + 2b^3 + c^3 = 3b(a + b)(c - a)$

14) Cho $a + b + 2c = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + 2c^3 = 3c(b + c)(a - b)$

15) Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng: $2(a^5 + b^5 + c^5) = -5abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

16) Cho $a + b - c = 0$. Chứng minh rằng: $2(a^5 + b^5 - c^5) = -5abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

17) Cho $a - b + c = 0$. Chứng minh rằng: $2(a^5 - b^5 + c^5) = -5abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

18) Cho $a - b - c = 0$. Chứng minh rằng: $2(a^5 - b^5 - c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

19) Phân tích thành nhân tử: $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$.

20) Phân tích thành nhân tử: $(x + y)^5 - (y - z)^5 - (x + z)^5$

21) Phân tích thành nhân tử: $(y - z)^5 + (z + x)^5 - (x + y)^5$

22) Phân tích thành nhân tử: $(a - 1)^5 + (1 - b)^5 + (b - a)^5$

23) Phân tích thành nhân tử: $(x^2 - y^2)^5 - (x^2 - 1)^5 - (1 - y^2)^5$

24) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $S = \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2}$

25) Cho $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $S = \frac{xz}{y^2} - \frac{yz}{x^2} - \frac{xy}{z^2}$

26) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$. Tính $S = \frac{xy}{z^2} - \frac{yz}{x^2} - \frac{zx}{y^2}$

27) Cho $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$. Tính $S = \frac{yz}{x^2} - \frac{xy}{z^2} - \frac{zx}{y^2}$

28) Cho $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $S = \frac{xy}{2z^2} + \frac{4yz}{x^2} + \frac{zx}{2y^2}$

29) Cho $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0$. Tính $S = \frac{9xy}{2z^2} + \frac{yz}{6x^2} + \frac{4zx}{3y^2}$

30) Cho $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $S = \frac{6xy}{z^2} + \frac{3yz}{4x^2} + \frac{2zx}{9y^2}$

31) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$
 Chứng minh rằng: $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$

32) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$
 Chứng minh rằng: $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{z^3} = \frac{-3}{xyz}$

33) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$
 Chứng minh rằng: $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{-3}{xyz}$

34) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $(x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$
 Chứng minh rằng: $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} - \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$

35) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $(x + 2y + 3z)^2 = x^2 + 4y^2 + 9z^2$
 Chứng minh rằng: $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{8y^3} + \frac{1}{27z^3} = \frac{1}{2xyz}$

36) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $(4x - 3y + 2z)^2 = 16x^2 + 9y^2 + 4z^2$
 Chứng minh rằng: $\frac{1}{64x^3} - \frac{1}{27y^3} + \frac{1}{8z^3} = \frac{-1}{8xyz}$

37) Cho $a + b + c = 0$, đặt $A = \frac{4bc - a^2}{bc + 2a^2}$; $B = \frac{4ca - b^2}{ca + 2b^2}$;

$C = \frac{4ab - c^2}{ab + 2c^2}$. Chứng minh rằng: $A.B.C = 1$

38) Cho $a + b - c = 0$, đặt $A = \frac{4bc + a^2}{2a^2 - bc}$; $B = \frac{4ca + b^2}{2b^2 - ca}$;

$C = \frac{4ab - c^2}{ab + 2c^2}$. Chứng minh rằng: $A.B.C = 1$

39) Cho $a - b + c = 0$, đặt $A = \frac{4bc + a^2}{2a^2 - bc}$; $B = \frac{4ca - b^2}{ca + 2b^2}$;

$C = \frac{4ab + c^2}{2c^2 - ab}$. Chứng minh rằng: $A.B.C = 1$

40) Cho $a - b - c = 0$, đặt $A = \frac{4bc - a^2}{bc + 2a^2}$; $B = \frac{4ca + b^2}{2b^2 - ca}$;

$C = \frac{4ab + c^2}{2c^2 - ab}$. Chứng minh rằng: $A.B.C = 1$

41) Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, đặt $A = \frac{4a^2 - bc}{a^2 + 2bc}$; $B = \frac{4b^2 - ca}{2ca + b^2}$;

$C = \frac{4c^2 - ab}{c^2 + 2ab}$. Chứng minh rằng: $A.B.C = 1$

42) Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$, đặt $A = \frac{4a^2 + bc}{a^2 - 2bc}$; $B = \frac{4b^2 + ca}{b^2 - 2ca}$;

$C = \frac{4c^2 - ab}{c^2 + 2ab}$. Chứng minh rằng: $A.B.C = 1$

43) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a + b + c = 0$, đặt

$P = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$, $Q = \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}$. Tính $P.Q$

44) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a + b - c = 0$, đặt

$P = \frac{b-a}{c} + \frac{b+c}{a} - \frac{c+a}{b}$, $Q = \frac{a}{b+c} - \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b-a}$. Tính $P.Q$

45) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a - b + c = 0$, đặt

$P = \frac{a+b}{c} - \frac{b+c}{a} + \frac{a-c}{b}$, $Q = \frac{c}{a+b} + \frac{b}{a-c} - \frac{a}{b+c}$. Tính $P.Q$

46) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a - b - c = 0$, đặt

$P = \frac{c-b}{a} + \frac{c+a}{b} - \frac{a+b}{c}$, $Q = \frac{a}{c-b} + \frac{b}{c+a} - \frac{c}{a+b}$. Tính $P.Q$

47) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, đặt

$P = \frac{bc-ac}{ab} + \frac{ac-ab}{bc} + \frac{ab-bc}{ac}$, $Q = \frac{bc}{ac-ab} + \frac{ca}{ab-bc} + \frac{ab}{bc-ca}$.

Tính $P.Q$

48) Cho x, y, z thỏa:
$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c} \end{cases}$$

Tính $xy+yz+zx$ và $x^3+y^3+z^3$ theo a, b, c .

49) Cho x, y, z thỏa:
$$\begin{cases} x-y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c} \end{cases}$$

Tính $xz-yz-xy$ và $x^3-y^3+z^3$ theo a, b, c .

50) Cho x, y, z thỏa:
$$\begin{cases} x+y-z=a \\ x^2+y^2+z^2=b \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{c} \end{cases}$$

Tính $xy-yz-zx$ và $x^3+y^3-z^3$ theo a, b, c .

51) Cho x, y, z thỏa:
$$\begin{cases} x-y-z=a \\ x^2+y^2+z^2=b \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{c} \end{cases}$$

Tính $yz-zx-xy$ và $x^3-y^3-z^3$ theo a, b, c .

DẠNG TỈ LỆ THỨC

Bài 8:

1) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+c-a}{a}$

Tính $A = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

2) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $\frac{b+c-a}{c} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b-c}{a}$

Tính $A = \frac{(b-a)(c-b)(c+a)}{abc}$

3) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $\frac{a+b+c}{c} = \frac{b+c-a}{b} = \frac{a+c-b}{a}$

4) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $\frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b-c}{b} = \frac{a+c-b}{c}$

Tính $A = \frac{(a-b)(b+c)(c-a)}{abc}$

5) Cho
$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \end{cases}$$
 Chứng minh rằng: $xy+yz+zx=0$.

6) Cho
$$\begin{cases} a+b-c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{-z}{c} \end{cases}$$
 Chứng minh rằng: $xy+yz+zx=0$.

7) Cho
$$\begin{cases} a-b+c=2 \\ a^2+b^2+c^2=4 \\ \frac{x}{a}=\frac{-y}{b}=\frac{z}{c} \end{cases}$$
 Chứng minh rằng: $xy+yz+zx=0$.

8) Cho
$$\begin{cases} a-b-c=-3 \\ a^2+b^2+c^2=9 \\ \frac{-x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \end{cases}$$
 Chứng minh rằng: $xy+yz+zx=0$.

9) Cho
$$\begin{cases} a-b+c=-4 \\ a^2+b^2+c^2=16 \\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \end{cases}$$
 Chứng minh rằng: $xz=xy+yz$.

10) Cho
$$\begin{cases} a+b-c=7 \\ a^2+b^2+c^2=49 \\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \end{cases}$$
 Chứng minh rằng: $xy=xz+yz$.

11) Cho $\begin{cases} b+c-a=8 \\ a^2+b^2+c^2=64 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $yz = xy + zx$
 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

12) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{2002} = \frac{b}{2003} = \frac{c}{2005}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c) = (a-c)^2$

13) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c) = (a-c)^2$

14) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{-1997} = \frac{b}{-1996} = \frac{c}{-1995}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c) = (a-c)^2$

15) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{2006} = \frac{b}{2007} = \frac{c}{2008}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c) = (a-c)^2$

16) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{x} = \frac{b}{x+1} = \frac{c}{x+2}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c) = (a-c)^2$

17) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{x-1} = \frac{b}{x} = \frac{c}{x+1}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c) = (a-c)^2$

18) Cho $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$

19) Cho $\frac{x}{a-2b+c} = \frac{y}{2a-b-c} = \frac{z}{4a+4b+c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{z-y-2x} = \frac{c}{4x-4y+z}$

20) Cho $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4b-4a-c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x+2y-z} = \frac{b}{2x+y+z} = \frac{c}{4x-4y-z}$

21) Cho $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{c-b-2a} = \frac{z}{4a-4b+c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x-2y+z} = \frac{b}{2x-y-z} = \frac{c}{4x+4y+z}$

22) Cho $\frac{x}{2b+c-a} = \frac{y}{b-c-2a} = \frac{z}{c-4a-4b}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{z-y-2x} = \frac{c}{z-4x+4y}$

23) Cho $\frac{x}{a-2b+c} = \frac{y}{b+c-2a} = \frac{z}{4a+4b+c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x-2y+z} = \frac{b}{y+z-2x} = \frac{c}{4x+4y+z}$

24) Cho $\frac{x}{a+2b-c} = \frac{y}{2a+b+c} = \frac{z}{4b+c-4a}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x+2y-z} = \frac{b}{2x+y+z} = \frac{c}{4y+z-4x}$

25) Cho $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

26) Cho $\frac{cy-bz}{x} = \frac{az-cx}{y} = \frac{bx-ay}{z}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

27) Cho $\frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$

28) Cho $\frac{4bz-5cy}{3a} = \frac{5cx-3az}{4b} = \frac{3ay-4bx}{5c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x}{3a} = \frac{y}{4b} = \frac{z}{5c}$

29) Cho $\frac{3cy-4bz}{2x} = \frac{4az-2cx}{3y} = \frac{2bx-3ay}{4z}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{2x} = \frac{b}{3y} = \frac{c}{4z}$

30) Cho $\frac{7xy-5bz}{x} = \frac{2az-7cx}{y} = \frac{5bx-2ay}{z}$.

Chứng minh rằng: $\frac{2a}{x} = \frac{5b}{y} = \frac{7c}{z}$

31) Cho $\frac{9bz-10cy}{a} = \frac{5cx-3az}{3b} = \frac{2ay-3bx}{5c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{2x}{a} = \frac{4y}{3b} = \frac{6z}{5c}$

32) Cho $\frac{14bz-15cy}{a} = \frac{9cx-7az}{2b} = \frac{5ay-6bx}{3c}$.

Chúng minh rằng: $\frac{3x}{a} = \frac{5y}{2b} = \frac{7z}{3c}$

33) Cho x, y, z, a, b, c khác 0 thỏa: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Chúng minh rằng: $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$

34) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

Chúng minh rằng: $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \right) = 36$

35) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $\frac{1}{x} = \frac{3}{y} = \frac{4}{z}$.

Chúng minh rằng: $(x + 3y + 4z)^2 = 26(x^2 + 9y^2 + 16z^2)$

36) Cho a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Chúng minh rằng: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = \frac{(a + b + c)^2}{x + y + z}$

37) Cho a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa: $\frac{3x}{a} = \frac{4y}{b} = \frac{5z}{c}$.

Chúng minh rằng: $\frac{a^2}{3x} + \frac{b^2}{4y} + \frac{c^2}{5z} = \frac{(a + b + c)^2}{3x + 4y + 5z}$

38) Cho a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thỏa: $a(y + z) = b(z + x) = c(x + y)$. Chúng minh rằng: $\frac{y - z}{a(b - c)} = \frac{z - x}{b(c - a)} = \frac{x - y}{c(a - b)}$

39) Cho x, y, z khác 0 và đôi một khác nhau thỏa: $z(a + b) = x(b + c) = y(c + a)$. Chúng minh rằng: $\frac{a - b}{z(x - y)} = \frac{b - c}{x(y - z)} = \frac{c - a}{y(z - x)}$

40) Cho a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thỏa: $a(y - z) = b(x - z) = c(x + y)$. Chúng minh rằng: $\frac{y + z}{a(b - c)} = \frac{z + x}{b(a - c)} = \frac{x - y}{c(a - b)}$

41) Cho a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thỏa: $a(z - y) = b(z + x) = c(x - y)$. Chúng minh rằng: $\frac{y + z}{a(c - b)} = \frac{z - x}{b(c - a)} = \frac{x - y}{c(a - b)}$

42) Cho a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thỏa: $a(y + z) = b(z - x) = c(y - x)$. Chúng minh rằng: $\frac{x + y}{c(b - a)} = \frac{y - z}{a(b - c)} = \frac{z + x}{b(c - a)}$

43) Cho a, b, c khác 0 và $a \neq -b, b \neq -a, c \neq -a$ thỏa: $a(y + z) = b(x - z) =$

$c(x - y)$. Chúng minh rằng: $\frac{x + y}{c(a + b)} = \frac{y - z}{a(c - b)} = \frac{z + x}{b(c + a)}$

44) Cho a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa: $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c} = k$.

Chúng minh rằng: $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$

45) Cho a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa: $\frac{yz - x^2}{a} = \frac{y^2 + zx}{b} = \frac{z^2 + xy}{c} = k$.

Chúng minh rằng: $\frac{bc - a^2}{x} = \frac{b^2 + ca}{y} = \frac{c^2 + ab}{z}$

46) Cho a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa: $\frac{x^2 + yz}{a} = \frac{y^2 + zx}{b} = \frac{xy - z^2}{c} = k$.

Chúng minh rằng: $\frac{a^2 + bc}{x} = \frac{b^2 + ca}{y} = \frac{ab - c^2}{z}$

47) Cho a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa: $\frac{x^2 - 6yz}{a} = \frac{4y^2 - 3zx}{2b} = \frac{9z^2 - 2xy}{3c} = k$.

Chúng minh rằng: $\frac{a^2 - 6bc}{x} = \frac{4b^2 - 3ca}{2y} = \frac{9c^2 - 2ab}{3z}$

48) Cho a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa:

$$\frac{9x^2 - 20yz}{3a} = \frac{16y^2 - 15zx}{4b} = \frac{25z^2 - 12xy}{5c}$$

Chúng minh rằng: $\frac{9a^2 - 20bc}{3x} = \frac{16b^2 - 15ca}{4y} = \frac{25c^2 - 12ab}{5z}$

49) Cho a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa: $\frac{x^2 - 15yz}{a} = \frac{9y^2 - 5zx}{3b} = \frac{25z^2 - 3xy}{5c}$

Chúng minh rằng: $\frac{a^2 - 15bc}{x} = \frac{9b^2 - 5ca}{3y} = \frac{25c^2 - 3ab}{5z}$

50) Cho a, b, c thỏa: $\begin{cases} b \neq c \\ a + b \neq c \\ c^2 = 2(ac + bc - ab) \end{cases}$

Chúng minh rằng: $\frac{a^2 + (a - c)^2}{b^2 + (b - c)^2} = \frac{a - c}{b - c}$

51) Cho a, b, c thỏa: $\begin{cases} b \neq c \\ b \neq a+c \\ c^2 = 2(bc+ab-ac) \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + (a+c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \frac{a+c}{b-c}$

52) Cho a, b, c thỏa: $\begin{cases} b+c \neq 0 \\ a+b+c \neq 0 \\ c^2 = -2(ac+bc+ab) \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + (a+c)^2}{b^2 + (b+c)^2} = \frac{a+c}{b+c}$

53) Cho a, b, c thỏa: $\begin{cases} b+c \neq 0 \\ a \neq b+c \\ c^2 = 2(ac-bc+ab) \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b+c)^2} = \frac{c-a}{b+c}$

54) Cho a, b, c thỏa: $\begin{cases} c \neq 2b \\ a+b \neq \frac{c}{2} \\ c^2 = 4(ac+bc-2ab) \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\frac{4a^2 + (2a-c)^2}{4b^2 + (2b-c)^2} = \frac{2a-c}{2b-c}$

DẠNG TỔNG ĐẶC BIỆT

Bài 9: Tính (rút gọn)

1) $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)}$

2) $\frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)}$

3) $\frac{1}{(x+7)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+9)} + \frac{1}{(x+9)(x+10)}$

4) $\frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)}$

5) $\frac{1}{(x-5)(x-4)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} + \frac{1}{(x-6)(x-7)}$

6) $\frac{1}{(x-7)(x-6)} + \frac{1}{(x-7)(x-8)} + \frac{1}{(x-8)(x-9)}$

7) $\frac{1}{(x-7)(x-8)} + \frac{1}{(x-8)(x-9)} + \frac{1}{(x-9)(x-10)}$

8) $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{3}{(x+4)(x+7)}$

9) $\frac{3}{(x+1)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)}$

10) $\frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{-5}{(x+10)(x+5)} + \frac{3}{(x+7)(x+10)}$

11) $\frac{-3}{(x+3)(x+6)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{7}{(x+11)(x+4)}$

12) $\frac{2}{(x-1)(x+1)} + \frac{-3}{(x+1)(x-2)} + \frac{5}{(x-2)(x+3)}$

13) $\frac{2}{(x-3)(x-1)} + \frac{-7}{(x+4)(x-3)} + \frac{4}{x(x+4)}$

14) $\frac{2}{x(x+2)} + \frac{-8}{(x+2)(x-6)} + \frac{18}{(x-6)(x+12)}$

15) $\frac{13}{(x-7)(x+6)} + \frac{3}{(x+6)(x+9)} + \frac{-13}{(x+9)(x-4)}$

16) $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42}$

17) $\frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{2}{x^2-8x+15} + \frac{3}{x^2-13x+40}$

18) $\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{3}{x^2+7x+10} + \frac{2}{x^2+12x+35}$

19) $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-6x+8} + \frac{9}{x^2+x-20}$

20) $\frac{2}{x^2+4x+3} + \frac{4}{x^2+10x+21} + \frac{3}{x^2+17x+70}$

21) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$

22) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a}{a^2+b^2} + \frac{4a^3}{a^4+b^4} + \frac{8a^7}{a^8+b^8}$

$$\begin{aligned}
 23) & \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+b^8} + \dots \\
 24) & \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a}{a^2+b^2} + \frac{4a^3}{a^4+b^4} + \frac{8a^7}{a^8+b^8} + \frac{16a^{15}}{a^{16}+b^{16}} + \frac{32a^{31}}{a^{32}+b^{32}} + \dots \\
 25) & \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} + \frac{2}{1+y^2} + \frac{4}{1+y^4} + \frac{8}{1+y^8} + \frac{16}{1+y^{16}} + \frac{32}{1+y^{32}} + \dots \\
 26) & \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\
 27) & \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\
 28) & \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
 29) & \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{11.13} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
 30) & \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \\
 31) & \frac{1}{14.17} + \frac{1}{17.20} + \frac{1}{20.23} + \dots + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} \\
 32) & \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\
 33) & \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \dots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} \\
 34) & \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} \\
 35) & \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
 36) & \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{7.8.9} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \\
 37) & \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} + \frac{1}{5.6.7.8} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\
 38) & \frac{1}{4.5.6.7} + \frac{1}{5.6.7.8} + \frac{1}{6.7.8.9} + \frac{1}{7.8.9.10} + \dots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \\
 39) & \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} + \frac{1}{5.6.7.8} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n(n+1)} \\
 40) & \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
 41) & \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} + \frac{1}{5.6.7.8} + \frac{1}{6.7.8.9} + \frac{1}{7.8.9.10} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \\
 42) & \frac{3}{1.2.2} + \frac{4}{2.3.2^2} + \frac{5}{3.4.2^3} + \dots + \frac{n+2}{n(n+1)2^n} \\
 43) & \frac{3}{1.2.2} + \frac{4}{2.3.2^2} + \frac{5}{3.4.2^3} + \frac{6}{4.5.2^4} + \dots + \frac{n+1}{(n-1)n.2^{n-1}} \\
 44) & \frac{4}{2.3.2^2} + \frac{5}{3.4.2^3} + \frac{6}{4.5.2^4} + \dots + \frac{n+3}{(n+1)(n+2)2^{n+1}} \\
 45) & \frac{5}{3.4.2^3} + \frac{6}{4.5.2^4} + \frac{7}{5.6.2^5} + \dots + \frac{k+4}{(k+2)(k+3).2^{k+2}} \\
 46) & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\
 47) & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2006^2}\right) \\
 48) & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1999^2}\right) \\
 49) & \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{999^2}\right) \\
 50) & \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{6^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2999^2}\right)
 \end{aligned}$$

DẠNG HỆ ĐỐI XỨNG

Bài 10:

1) Cho a, b, c, d khác 0 thỏa: $a + b = c + d$ và $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

Chứng minh rằng: $a^{2006} + b^{2006} = c^{2006} + d^{2006}$

2) Cho x, y, a, b khác 0 thỏa: $\begin{cases} x + y = a + b \\ x^3 + y^3 = a^3 + b^3 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $x^{2005} + y^{2005} = a^{2005} + b^{2005}$

3) Cho x, y, a, b khác 0 thỏa: $\begin{cases} x - y = a + b \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $x^{2000} + y^{2000} = a^{2000} + b^{2000}$

4) Cho x, y, a, b khác 0 thỏa:
$$\begin{cases} x + y = a - b \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $x^{1998} + y^{1998} = a^{1998} + b^{1998}$

5) Cho x, y, a, b khác 0 thỏa:
$$\begin{cases} x - y = a - b \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $x^{1000} + y^{1000} = a^{1000} + b^{1000}$

6) Cho x, y, a, b khác 0 thỏa: $x + y = a + b$ và $x^4 + y^4 = a^4 + b^4$

a) Khai triển $(x + y)^4$ và $(a + b)^4$

b) Chứng minh: $2xy(x + y)^2 - x^2y^2 = 2ab(a + b)^2 - a^2b^2$

c) Chứng minh: $u^2 + uv + v^2 \geq 0$. dấu "=" xảy ra khi nào?

d) Chứng minh: $x^n + y^n = a^n + b^n$, với mọi n là số tự nhiên.

7) Cho x, y, a, b khác 0 thỏa:
$$\begin{cases} x - y = a + b \\ x^4 + y^4 = a^4 + b^4 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $x^n + y^n = a^n + b^n$ với mọi n chẵn.

8) Cho x, y, a, b khác 0 thỏa:
$$\begin{cases} x + y = a - b \\ x^4 + y^4 = a^4 + b^4 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $x^n + y^n = a^n + b^n$ với mọi n chẵn.

9) Cho x, y, a, b khác 0 thỏa:
$$\begin{cases} x - y = a - b \\ x^4 + y^4 = a^4 + b^4 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $x^n + y^n = a^n + b^n$ với mọi n chẵn.

10) Cho $x + y = a; x^2 + y^2 = b; x^3 + y^3 = c$.

Chứng minh: $a^3 - 3ab + 2c = 0$

11) Cho $x - y = a; x^2 + y^2 = b; x^3 - y^3 = c$. Tính: $a^3 - 3ab + 2c + 1$.

12) Cho $x + \frac{1}{x} = a; y + \frac{1}{y} = b; xy + \frac{1}{xy} = c$. Tính $a^2 + b^2 + c^2 - abc$.

13) Cho
$$\begin{cases} x + \frac{1}{2x} = a \\ 2y + \frac{1}{3y} = b \\ 2xy + \frac{1}{6xy} = c \end{cases}$$
 . Tính $\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + c^2 - abc$.

14) Cho
$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{4x} = a \\ y + \frac{1}{y} = b \\ 2xy - \frac{1}{4xy} = c \end{cases}$$
 . Tính $abc + \frac{1}{2}b^2 - a^2 - c^2$

15) Cho
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2}{x} = a \\ 3y - \frac{1}{4y} = b \\ xy - \frac{1}{2xy} = c \end{cases}$$
 . Tính $9a^2 - 8b^2 - 12c^2 + 12abc$.

16) Cho
$$\begin{cases} \frac{2}{3x} - \frac{x}{2} = a \\ \frac{3}{2y} - 4y = b \\ 2xy + \frac{1}{xy} = c \end{cases}$$
 . Tính $18a^2 + b^2 - 3c^2 + 3abc$.

17) Cho a, b, c khác 0 thỏa:
$$\begin{cases} a = by + cz \\ b = ax + cz \\ c = ax + by \end{cases}$$
 . Tính x, y, z theo a, b, c và

Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}$ không phụ thuộc vào a, b, c .

18) Cho a, b, c, d, e, f thỏa:
$$\begin{cases} d = eb + fc \\ e = da + fc \\ f = da + eb \end{cases}$$
 . Tính $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$.

19) Cho
$$\begin{cases} a = by - cz \\ b = ax - cz \\ c = -ax - by \end{cases}$$
 .

Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}$ không phụ thuộc vào a, b, c .

20) Cho
$$\begin{cases} a = cz - by \\ -b = ax + cz \\ c = ax - by \end{cases}$$
 . Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}$ không phụ thuộc vào a, b, c .

21) Cho
$$\begin{cases} a = -by - cz \\ b = cz - ax \\ c = by - ax \end{cases}$$

Chúng minh rằng: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}$ không phụ thuộc vào a, b, c .

22) Cho
$$\begin{cases} a = by + cz \\ b = ax + cz \\ -c = ax + by \end{cases}$$
 Chúng minh rằng: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} - \frac{1}{z-1}$ không phụ

thuộc vào a, b, c .

23) Cho
$$\begin{cases} a = by + cz \\ -b = ax + cz \\ c = ax + by \end{cases}$$

Chúng minh rằng: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z+1}$ không phụ thuộc vào a, b, c .

24) Cho
$$\begin{cases} -a = by + cz \\ b = ax + cz \\ c = ax + by \end{cases}$$

Chúng minh rằng: $\frac{1}{z+1} + \frac{1}{y+1} - \frac{1}{x-1}$ không phụ thuộc vào a, b, c .

25) Cho x, y là nghiệm số của phương trình ẩn t : $at^2 + bt + c = 0$.
(a khác 0). Đặt $S_1 = x + y$; $S_2 = x^2 + y^2$; $S_3 = x^3 + y^3$; $S_4 = x^4 + y^4$;
.....; $S_n = x^n + y^n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Chúng minh rằng:

- a) $S_2 + b \cdot S_1 + 2c = 0$. b) $S_3 + b \cdot S_2 + c \cdot S_1 = 0$.
c) $a \cdot S_4 + b \cdot S_3 + c \cdot S_2 = 0$. d) $S_5 + b \cdot S_4 + c \cdot S_3 = 0$.
e) $S_n + b \cdot S_{n-1} + c \cdot S_{n-2} = 0$.

26) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa: $a + 1/b = b + 1/c = c + 1/a$.

- a) Cho $a = 1$. Hãy tìm b, c .
b) Chúng minh rằng nếu a, b, c đôi một khác nhau thì $a^2b^2c^2 = 1$.
c) Chúng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì $a = b = c$.

27) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a + \frac{1}{2b} = 2b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$

- a) Chúng minh rằng: nếu $a \neq 2b \neq c \neq a$ thì $4a^2b^2c^2 = 1$.
b) Chúng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì $\frac{a}{2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{2}$.

28) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $c + \frac{1}{3a} = 3a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c}$

- a) Chúng minh rằng: nếu $3a \neq b \neq c \neq 3a$ thì $9a^2b^2c^2 = 1$.

b) Chúng minh rằng: nếu $a, b, c > 0$ thì: $\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{3}$

29) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $a + \frac{1}{2b} = 2b + \frac{1}{3c} = 3c + \frac{1}{a}$

- a) Chúng minh rằng: nếu $a \neq 2b \neq 3c \neq a$ thì: $36a^2b^2c^2 = 1$.

b) Chúng minh rằng: nếu $a, b, c > 0$ thì: $\frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2}$.

30) Cho a, b, c khác 0 thỏa: $3a + \frac{1}{4b} = 4b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{3a}$

- a) Chúng minh rằng: nếu $3a \neq 4b \neq c \neq 3a$ thì: $144a^2b^2c^2 = 1$.

b) Chúng minh rằng: nếu $a, b, c > 0$ thì: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{12}$.

31) Cho $a, b, c > 0$ thỏa: $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$.

Chúng minh: $a^{2005} + \frac{1}{b^{2006}} = b^{2005} + \frac{1}{c^{2006}} = c^{2005} + \frac{1}{a^{2006}}$

32) Cho a, b, c thỏa: $a^3 - b^2 - b = b^3 - c^2 - c = c^3 - a^2 - a = \frac{1}{3}$.

Chúng minh $a, b, c > 0$ và $a = b = c$.

33) Cho x, y, z thỏa: $x^3 - y^2 - y = y^3 - z^2 - z = z^3 - x^2 - x = 1/3$.

Tìm x, y, z

34) Cho x, y, z thỏa: $7x^3 - 3y^2 - 3y = 7y^3 - 3z^2 - 3z = 7z^3 - 3x^2 - 3x = 1$.

Tìm x, y, z

35) Cho x, y, z thỏa: $26x^3 - 3y^2 - 3y = 26y^3 - 3z^2 - 3z = 26z^3 - 3x^2 - 3x = 1$.

Tìm x, y, z

36) Tìm các số x, y, z thỏa: $4x - y^2 = 4y - z^2 = 4z - x^2 = 1$.

37) Tìm các số x, y, z thỏa: $3x - y^2 = 3y - z^2 = 3z - x^2 = 1$.

38) Tìm các số x, y, z thỏa: $2x - y^2 = 2y - z^2 = 2z - x^2 = 1$.

39) Tìm các số x, y, z thỏa: $5x - y^2 = 5y - z^2 = 5z - x^2 = 4$.

40) Tìm các số x, y, z thỏa: $x^2 + 6y = y^2 + 6z = z^2 + 6x = -5$.

41) Tìm các số x, y, z thỏa: $x^2 + 7y = y^2 + 7z = z^2 + 7x = -6$.

42) Tìm các số x, y, z thỏa: $x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{z} = z - \frac{1}{x} = 1$.

43) Tìm các số x, y, z thỏa: $x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{z} = z - \frac{1}{x} = -1$.

44) Tìm các số x, y, z thỏa: $x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{z} = z - \frac{1}{x} = 2$.

45) Tìm các số x, y, z thỏa: $x - \frac{1}{2y} = 2y - \frac{1}{3z} = 3z - \frac{1}{x} = 1$.

46) Cho x, y thỏa: $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

47) Cho x, y thỏa: $\begin{cases} ax - by = c \\ cy - bx = a \\ cx + ay = -b \end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^3 - b^3 + c^3 = -3abc$.

48) Cho x, y thỏa: $\begin{cases} ax - by = -c \\ bx + cy = -a \\ cx - ay = b \end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$.

49) Cho x, y thỏa: $\begin{cases} ax + by = -c \\ bx - cy = a \\ ay - cx = b \end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 - c^3 = -3abc$.

50) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ bx + cy + az = 0 \\ cx + ay + bz = 0 \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

51) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $\begin{cases} ax + by - cz = 0 \\ bx - cy + az = 0 \\ ay + bz - cx = 0 \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 - c^3 = -3abc$.

52) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $\begin{cases} ax - by + cz = 0 \\ cy + az - bx = 0 \\ cx + ay - bz = 0 \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $a^3 - b^3 + c^3 = -3abc$.

53) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $\begin{cases} ax - by - cz = 0 \\ az - bx - cy = 0 \\ ay - bz - cx = 0 \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$.

54) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $\begin{cases} x^2 - yz = a \\ y^2 - zx = b \\ z^2 - xy = c \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $ax + by + cz = (x + y + z)(a + b + c)$.

55) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $\begin{cases} x^2 + yz = a \\ y^2 + zx = b \\ z^2 - xy = c \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $ax + by - cz = (a + b + c)(x + y - z)$.

56) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $\begin{cases} x^2 + yz = a \\ y^2 - zx = b \\ z^2 + xy = c \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $ax - by + cz = (a + b + c)(x - y + z)$.

57) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $\begin{cases} x^2 - yz = a \\ y^2 + zx = b \\ z^2 + xy = c \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $ax - by - cz = (a + b + c)(x - y - z)$.

58) Cho x, y, z khác 0 thỏa: $\begin{cases} x^2 - yz = a \\ zx - y^2 = b \\ z^2 - xy = c \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $ax - by + cz = (a - b + c)(x + y + z)$.

59) Cho a, b, c thỏa: $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 1 \end{cases}$.

Tính $A = a^2 + b^9 + c^{2006}$.

60) Cho x, y, z thỏa: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$.

a) Chứng minh rằng: $0 \leq x, y, z \leq 1$.

b) Tính $B = xyz$.

c) Tính $C = (x - 1)^{17} + (y - 1)^9 + (z - 1)^{1997}$.

DẠNG ĐUA VỀ TỔNG VÀ TÍCH CÁC LŨY THỪA

Bài 11:

- 1) Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 = (a^2 + b^2)(a + b) - ab(a + b)$.
- 2) Chứng minh rằng: $x^5 + y^5 = (x^4 + y^4)(x + y) - xy(x^3 + y^3)$.
- 3) Chứng minh rằng: $x^5 + y^5 = (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x^2y^2(x + y)$.
- 4) Chứng minh rằng: $x^7 + y^7 = (x^3 + y^3)(x^4 + y^4) - x^3y^3(x + y)$.
- 5) Chứng minh rằng: $u^9 + v^9 = (u^8 + v^8)(u + v) - uv(u^7 + v^7)$.
- 6) Chứng minh rằng: $u^9 + v^9 = (u^5 + v^5)(u^4 + v^4) - u^4v^4(u + v)$.

- 7) Chứng minh rằng: $u^9 + v^9 = (u^6 + v^6)(u^3 + v^3) - u^3v^3(u^3 + v^3)$.
 8) Chứng minh rằng: $u^9 + v^9 = (u^7 + v^7)(u^2 + v^2) - u^2v^2(u^5 + v^5)$.
 9) Cho hai số a, b thỏa: $a + b = 1$ và $ab = -1$. Đặt $S_2 = a^2 + b^2 + a^4 + b^4$; $S_3 = a^3 + b^3 + a^5 + b^5$; $S_4 = a^4 + b^4 + a^6 + b^6$; $S_5 = a^5 + b^5 + a^7 + b^7$; ...; $S_{n-1} = a^{n-1} + b^{n-1} + a^{n+1} + b^{n+1}$; $S_n = a^n + b^n + a^{n+2} + b^{n+2}$; $S_{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + a^{n+3} + b^{n+3}$. Chứng minh rằng:
 a) $S_4 = S_3 + S_2$ b) $S_5 = S_4 + S_3$ c) $S_6 = S_5 + S_4$
 d) $S_7 = S_6 + S_5$ e) $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$

- 10) Cho x, y là các số thực sao cho: $x + \frac{1}{y} = a$; $y + \frac{1}{x} = b$; a, b là số

nguyên. Đặt $T_1 = xy + \frac{1}{xy}$; $T_2 = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$; $T_3 = x^3y^3 + \frac{1}{x^3y^3}$;

$$T_4 = x^4y^4 + \frac{1}{x^4y^4}; \dots; T_{2006} = x^{2006}y^{2006} + \frac{1}{x^{2006}y^{2006}}.$$

Chứng minh rằng:

- a) $T_1; T_2; T_3; T_4$ là các số nguyên.
 b) T_{2006} là số nguyên.
 11) Cho x, y là hai số dương thỏa: $x^3 + y^3 = x^4 + y^4 = x^5 + y^5$
 Tính $x^6 + y^6$

- 12) Cho $a, b > 0$ thỏa: $a + b = a^2 + b^2 = a^3 + b^3$. Tính $a^7 + b^7$

- 13) Cho $u, v > 0$ sao cho: $u^9 + v^9 = u^8 + v^8 = u^7 + v^7$. Tính $u^{10} + v^{10}$

- 14) Cho z, t dương thỏa: $z^{99} + t^{99} = z^{98} + t^{98} + z^{97} + t^{97}$. Tính $z^{1999} + t^{1999}$

- 15) Cho a, b là hai số dương thỏa:

$$a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}. \text{ Tính } a^{2005} + b^{2005}$$

- 16) Cho a, b là hai số dương thỏa:

$$a^{2006} + b^{2006} = a^{2005} + b^{2005} = a^{2004} + b^{2004}. \text{ Tính } a^{1003} + b^{1003}$$

- 17) Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ sao cho
$$\begin{cases} ax + by = 3 \\ ax^2 + by^2 = 5 \\ ax^3 + by^3 = 9 \\ ax^4 + by^4 = 17 \end{cases}$$

$$\text{Tính } A = ax^5 + by^5; B = ax^{2006} + by^{2006}$$

- 18) Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ sao cho
$$\begin{cases} ax - by = 3 \\ ax^2 - by^2 = 5 \\ ax^3 - by^3 = 9 \\ ax^4 - by^4 = 17 \end{cases}$$

$$\text{Tính } A = ax^5 - by^5; B = ax^{2004} - by^{2004}$$

- 19) Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ sao cho
$$\begin{cases} ax - by = 3 \\ ax^2 + by^2 = 5 \\ ax^3 - by^3 = 9 \\ ax^4 + by^4 = 17 \end{cases}$$

$$\text{Tính } A = ax^5 - by^5; B = ax^{2000} + by^{2000}$$

- 20) Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ sao cho
$$\begin{cases} by - ax = 3 \\ by^2 - ax^2 = 5 \\ by^3 - ax^3 = 9 \\ by^4 - ax^4 = 17 \end{cases}$$

$$\text{Tính } A = by^5 - ax^5; B = by^{1000} - ax^{1000}$$

- 21) Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ sao cho
$$\begin{cases} by - ax = 3 \\ by^2 + ax^2 = 5 \\ by^3 - ax^3 = 9 \\ by^4 + ax^4 = 17 \end{cases}$$

$$\text{Tính } A = by^5 - ax^5; B = ax^{1998} + by^{1998}$$

CÁC DẠNG KHÁC

- 1) Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn:

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0.$$

- a) Chứng minh rằng: $\frac{a}{(b-c)^2} = \frac{b^2 - c^2 + ac - ab}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

- b) Chứng minh rằng: $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$

- 2) Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau sao cho:

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0. \text{ Chứng minh rằng trong ba số } a, b, c \text{ phải có ít nhất một số âm và một số dương.}$$

- 3) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 0.$

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

4) Cho $\begin{cases} b+c \neq 0 \\ c+a \neq 0 \\ b-a \neq 0 \\ c < 0, b > 0 \end{cases}$ thỏa: $\frac{a}{b+c} - \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b-a} = 0$.

Chứng minh rằng: $a < 0$

5) Cho $\begin{cases} b-c \neq 0 \\ c+a \neq 0 \\ a+b \neq 0 \\ c < 0, a > 0 \end{cases}$ thỏa: $\frac{a}{c-b} + \frac{b}{c+a} + \frac{-c}{a+b} = 0$.

Chứng minh rằng: $b > 0$

6) Cho $\begin{cases} b-c \neq 0 \\ c+a \neq 0 \\ a+b \neq 0 \\ b < 0, a > 0 \end{cases}$ thỏa: $\frac{b}{c+a} + \frac{a}{c-b} - \frac{c}{a+b} = 0$.

Chứng minh rằng: $c > 0$

7) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$.

Tính $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$.

8) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 2$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = a+b+c$.

9) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = -\frac{a+b+c}{2}$.

10) Cho a, b, c thỏa: $a+b+c$ khác 0 và $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$.

Tính $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

11) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 3$ và $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 2$.

Tính $a+b+c$.

12) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = -2$ và $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 5$.

Tính $a+b+c$.

13) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} = \frac{3}{4}$.

Chứng minh: $\frac{a^2}{2a+b+c} + \frac{b^2}{2b+c+a} + \frac{c^2}{2c+a+b} = \frac{a+b+c}{4}$.

14) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} = 1$.

Tính $\frac{a^2}{2a+b+c} + \frac{b^2}{2b+c+a} + \frac{c^2}{2c+a+b}$.

15) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{2a-b+c} + \frac{b}{2b-a-c} + \frac{c}{2c+a-b} = \frac{3}{4}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{2a-b+c} + \frac{b^2}{c+a-2b} + \frac{c^2}{2c+a-b} = \frac{a-b+c}{4}$.

16) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{2a+b-c} + \frac{b}{2b-c+a} + \frac{c}{2c-a-b} = \frac{3}{4}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{2a+b-c} + \frac{b^2}{2b-c+a} + \frac{c^2}{a+b-2c} = \frac{a+b-c}{4}$.

17) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{2a-b-c} + \frac{b}{2b+c-a} + \frac{c}{2c+b-a} = \frac{3}{4}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{2a-b-c} + \frac{b^2}{a-2b-c} + \frac{c^2}{a-b-2c} = \frac{a-b-c}{4}$.

18) Cho a, b, c thỏa: $\frac{2a}{4a+b+c} + \frac{b}{2b+c+2a} + \frac{c}{2c+2a+b} = \frac{3}{4}$.

Chứng minh rằng: $\frac{4a^2}{4a+b+c} + \frac{b^2}{2b+c+2a} + \frac{c^2}{2c+2a+b} = \frac{2a+b+c}{4}$.

19) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{2a+3b+c} + \frac{3b}{6b+c+a} + \frac{c}{2c+a+3b} = \frac{3}{4}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{2a+3b+c} + \frac{9b^2}{6b+c+a} + \frac{c^2}{2c+a+3b} = \frac{a+3b+c}{4}$.

20) Cho a, b, c thỏa: $\frac{a}{2a+3b+4c} + \frac{3b}{6b+4c+a} + \frac{4c}{8c+a+3b} = \frac{3}{4}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{2a+3b+4c} + \frac{9b^2}{6b+4c+a} + \frac{16c^2}{8c+a+3b} = \frac{a+3b+4c}{4}$.

PHƯƠNG TRÌNH

- Bài 1:** Mua 36 bông vừa hồng vừa cẩm chương hết 10000 đồng. Biết mỗi bông hồng giá 400 đồng, mỗi bông cẩm chương hết 200 đồng. Tìm số bông mỗi loại?
- Bài 2:** Có 54 con vừa gà, vừa mèo. Tất cả có 154 chân. Hỏi có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con mèo.
- Bài 3:** Có hai thùng đựng dầu, lúc đầu số dầu thùng lớn gấp đôi số dầu thùng nhỏ. Sau khi thêm vào thùng nhỏ 15 lít, lấy bớt ở thùng lớn 30 lít thì số dầu thùng nhỏ bằng $\frac{3}{4}$ số dầu thùng lớn. Hỏi lúc đầu mỗi thùng chứa mấy lít?
- Bài 4:** Hai rổ trứng có tất cả 80 quả. Nếu chuyển 5 quả từ rổ thứ nhất sang rổ thứ hai thì số trứng trong rổ thứ nhất bằng $\frac{3}{5}$ số trứng trong rổ thứ hai. Hỏi lúc đầu mỗi rổ có bao nhiêu quả?
- Bài 5:** Số lượng dầu ở thùng thứ nhất bằng 2 lần số lượng dầu ở thùng thứ hai. Nếu bớt ở thùng thứ nhất ra 75 lít và thêm vào thùng thứ hai 35 lít thì lượng dầu trong hai thùng bằng nhau. Hỏi lúc đầu mỗi thùng chứa bao nhiêu lít dầu?
- Bài 6:** Có 480kg cà chua và khoai tây. Khối lượng khoai tây gấp 3 lần khối lượng cà chua. Tính khối lượng mỗi loại.
- Bài 7:** Có hai kho thóc. Kho thứ nhất hơn kho thứ hai 100 tấn. Nếu chuyển từ kho thứ nhất sang kho thứ hai 60 tấn thì số thóc ở kho thứ nhất bằng $\frac{12}{13}$ số thóc ở kho thứ hai. Tính số thóc mỗi kho lúc đầu.
- Bài 8:** Bể nước A hơn bể nước B 1200 lít. Người ta tháo từ bể A sang bể B bằng một vòi mỗi phút chảy được 20 lít. Sau 20 phút, lượng nước trong bể A bằng $\frac{29}{27}$ lượng nước trong bể B. Tính lượng nước có trong mỗi bể lúc đầu.
- Bài 9:** Bác thợ cả và anh công nhân cùng làm việc. Mỗi ngày bác thợ cả làm hơn anh công nhân 10 sản phẩm. Sau ba ngày làm việc cả hai người làm được 930 sản phẩm. Hỏi mỗi người trong một ngày làm được bao nhiêu sản phẩm?
- Bài 10:** Trong tháng giêng hai tổ sản xuất được 720 chi tiết máy. Trong tháng hai, tổ một vượt mức 15%, tổ hai vượt mức 12% nên sản xuất được 819 chi tiết máy. Tính xem trong tháng giêng, mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

- Bài 11:** Năm ngoái tổng số dân hai tỉnh A và B là 4.000.000 người. Năm nay tỉnh A tăng 1,2% và tỉnh B tăng 1,1%. Tổng số dân hai tỉnh năm nay là 4.045.000. Tính số dân mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay.
- Bài 12:** Trong một trang sách, nếu bớt đi 4 dòng và mỗi dòng bớt đi 3 chữ thì cả trang bớt đi 136 chữ, nếu tăng thêm 3 dòng và mỗi dòng thêm 2 chữ thì cả trang sẽ tăng thêm 109 chữ. Tính số dòng trong trang và số chữ có trong mỗi dòng.
- Bài 13:** Tìm hai số nguyên liên tiếp biết 2 lần số nhỏ cộng với 3 lần số lớn bằng -87.
- Bài 14:** Cho ba số tự nhiên liên tiếp. Tích hai số đầu nhỏ hơn tích hai số sau là 50. Tìm ba số tự nhiên đó.
- Bài 15:** Mẫu của một phân số gấp 4 lần tử của nó. Nếu tăng cả tử lẫn mẫu thêm 2 đơn vị thì được phân số $\frac{1}{2}$. Tìm phân số đã cho.
- Bài 16:** Một phân số có tử nhỏ hơn mẫu là 8 đơn vị. Nếu thêm 2 đơn vị vào tử và bớt mẫu đi 3 đơn vị thì được phân số $\frac{3}{4}$. Tìm phân số đã cho.
- Bài 17:** Hiệu của hai số là 12. Nếu chia số bé cho 7, chia số lớn cho 5 thì thương thứ nhất bé hơn thương thứ hai là 4 đơn vị. Tìm hai số ấy.
- Bài 18:** Tỉ số của hai số là $\frac{3}{2}$. Nếu chia số bé cho 4, chia số lớn cho 9 thì thương thứ nhất lớn hơn thương thứ hai là 4 đơn vị. Tìm hai số đó.
- Bài 19:** Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng 2 lần chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 7 đơn vị. Nếu viết hai chữ số ấy theo thứ tự ngược lại thì thu được một số mới có hai chữ số. Số mới nhỏ hơn số cũ 27 đơn vị.
- Bài 20:** Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết tổng hai chữ số là 12. Nếu đổi chỗ hai chữ số thì thu được số mới hơn số cũ là 36 đơn vị.
- Bài 21:** Tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục của một số có hai chữ số là 10. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì ta thu được số mới nhỏ hơn số cũ là 18 đơn vị. Tìm số có hai chữ số đó.
- Bài 22:** Chữ số hàng chục của một số có hai chữ số hơn chữ số hàng đơn vị là 5. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau sẽ được một số mới bằng $\frac{3}{8}$ số cũ. Tìm số đã cho.
- Bài 23:** Cho một số gồm có hai chữ số. Tìm số đó biết tổng hai chữ số của số đó nhỏ hơn số đó 6 lần và thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được một số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho.

DẠNG TOÁN NĂNG SUẤT

- Bài 1:** Hai đội công nhân cùng sửa một con đường hết 24 ngày. Mỗi ngày, phần việc làm được của đội I bằng $\frac{3}{2}$ phần việc đội II làm được. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội sẽ sửa xong con đường trong bao lâu?

Bài 2: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau $\frac{24}{5}$ giờ đầy bể. Mỗi giờ, lượng nước vòi A chảy bằng $\frac{3}{2}$ lượng nước vòi B chảy. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?

Bài 3: Hai người cùng làm một công việc thì trong 12 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 4 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì được $\frac{2}{5}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người làm hết công việc trong bao lâu?

Bài 4: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì trong 1 giờ 20 phút đầy bể. Nếu mở vòi I trong 10 phút, vòi II trong 12 phút thì được $\frac{2}{15}$ bể.

Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?

Bài 5: Hai máy cùng cày trên một cánh đồng. Nếu cả hai máy cùng làm việc thì sau 4 ngày sẽ cày xong cả cánh đồng. Trên thực tế thì hai máy cùng làm việc trong 2 ngày. Sau đó máy I bị điều đi nơi khác làm việc. Máy II làm một mình thì sau 6 ngày nữa cày xong cánh đồng. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi máy phải mất bao lâu để cày xong cánh đồng?

Bài 6: Hai người cùng làm việc thì trong 6 giờ 40 phút xong việc. Nếu để một mình người thứ nhất làm trong 5 giờ rồi người đó nghỉ thì người thứ hai phải làm nốt phần việc còn lại trong 8 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người phải mất bao lâu để hoàn thành công việc?

Bài 7: Hai đội công nhân cùng làm việc thì trong 4 ngày xong việc. Nhưng khi thực hiện, đội II phải đi làm việc khác. Đội I làm một mình được 9 ngày thì đội II quay trở lại. Hai đội cùng làm trong 1 ngày nữa thì xong việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội phải mất bao lâu mới hoàn thành công việc?

Bài 8: Hai đội xây dựng cùng làm chung một công việc và dự định trong 12 ngày thì xong. Họ cùng làm với nhau được 8 ngày thì đội I được điều động làm việc khác, đội II tiếp tục làm. Do cải tiến kĩ thuật, năng suất tăng gấp đôi nên đội II làm xong phần việc còn lại trong 3 ngày rưỡi. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày xong công việc trên?

Bài 9: Một đội máy cày dự định mỗi ngày cày 40 ha. Do siêng năng làm việc nên trên thực tế mỗi ngày đội cày được 52 ha. Vì vậy không những đã cày xong trước hai ngày mà còn cày thêm được 4 ha nữa. Tính diện tích ruộng mà đội cày được trên thực tế.

Bài 10: Một đội thợ mỏ theo kế hoạch mỗi ngày phải khai thác $50m^3$ than. Do siêng năng làm việc nên trên thực tế mỗi ngày đội khai thác được $57m^3$ than. Vì vậy không những đã xong trước thời hạn 1 ngày mà còn vượt mức $13m^3$ than. Tính lượng than mà đội thợ mỏ khai thác theo kế hoạch và trên thực tế.

Bài 11: Theo kế hoạch một đội máy cày phải cày mỗi ngày 15 ha. Do siêng năng làm việc nên trên thực tế đội đã cày xong trước thời hạn 1 ngày và vượt mức 3 ha. Tính diện tích ruộng mà đội đã cày theo kế hoạch.

Bài 12: Số người đội I gấp đôi số người đội II. Đội I đào được $2700m^3$ đường, đội II đào được $1257m^3$ đường. Mỗi người của đội I đào được nhiều hơn mỗi người của đội II là $5m^3$. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu người?

Bài 13: Một vòi nước chảy vào một bể không có nước. Cùng lúc đó có một vòi chảy từ bể ra ngoài. Mỗi giờ, lượng nước chảy ra bằng $\frac{4}{5}$

lượng nước chảy vào. Sau 5 giờ nước trong bể đạt $\frac{1}{8}$ dung tích bể. Hỏi

nếu bể không có nước và chỉ mở vòi chảy vào thì sau bao lâu đầy bể.

Bài 14: Một bồn nước có đặt hai vòi chảy vào là A và B và một vòi chảy ra là C. Bồn trống, nếu mở riêng vòi A thì sau 4 giờ đầy bồn. Bồn trống, nếu mở riêng vòi B thì sau 6 giờ đầy bồn. Bồn trống, nếu mở cả 3 vòi thì sau 7 giờ 12 phút bồn đầy. Nếu bồn đầy nước và mở riêng vòi C thì sau bao lâu bồn hết nước?

TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Bài 1: Anh Hai và anh Ba đi xe đạp, khởi hành cùng một lúc. Vận tốc anh Hai bằng $\frac{4}{5}$ vận tốc anh Ba. Nếu anh Hai tăng vận tốc $1km/h$, anh Ba giảm vận tốc $1km/h$ thì sau 3h đoạn đường anh Ba đi được dài hơn đoạn đường anh Hai đã đi là $3km$. Tính vận tốc mỗi anh.

Bài 2: Xe máy đi từ A đến B dài $35km$. Lúc về bằng đường khác dài $42km$ với vận tốc hơn vận tốc lượt đi là $6km/h$. Thời gian về bằng $\frac{12}{13}$ thời gian đi. Tìm vận tốc lượt đi và về.

Bài 3: Hùng đi từ nhà sang Hà Nội bằng đoạn đường dài $48km$. Lúc về đi tắt ngắn hơn $13km$. Vận tốc lúc về bằng $\frac{5}{6}$ vận tốc lúc đi. Thời gian về ít hơn đi là 30 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Bài 4: Xe hơi đi từ A đến B với vận tốc $50km/h$ rồi từ B về A với vận tốc giảm bớt $10km/h$. Cả đi và về mất 5 giờ 24 phút. Tính quãng đường AB.

Bài 5: Ôtô dự định đi từ A đến B với vận tốc $50km/h$. Đi được 20 phút thì gặp đường xấu nên vận tốc giảm còn $40km/h$, vì vậy đến B trễ 18 phút. Tính quãng đường AB.

Bài 6: Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc $30km/h$. Lúc về người đó đi với vận tốc $24km/h$. Do đó thời gian về lâu hơn thời gian đi là 30 phút. Tính quãng đường AB.

- Bài 7:** Xe lửa đi từ A đến B hết 10 giờ 40 phút. Nếu vận tốc giảm 10km/h thì đến B trễ 2 giờ 8 phút. Tính quãng đường AB và vận tốc xe lửa.
- Bài 8:** Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì đến B trễ 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì đến B sớm hơn một giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định lúc đầu.
- Bài 9:** Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 150 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau hai giờ. Tìm vận tốc của mỗi ô tô biết rằng nếu vận tốc của ô tô A tăng thêm 15km/h thì bằng hai lần vận tốc ô tô B.
- Bài 10:** Một ô tô đi từ A đến B. Cùng lúc đó ô tô thứ hai đi từ B đến A với vận tốc bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc ô tô thứ nhất. Sau 5 giờ chúng gặp nhau. Hỏi mỗi ô tô đi cả quãng đường AB mất bao lâu?
- Bài 11:** Đò máy xuôi dòng từ A đến B hết 4 giờ và ngược dòng từ B về A mất 5 giờ. Vận tốc dòng nước là 2km/h. Tính quãng đường AB. (Xuôi ngược chiều)
- Bài 12:** Một canô xuôi dòng 42 km rồi ngược dòng trở lại 20 km, mất tổng cộng 5 giờ. Biết vận tốc dòng chảy là 2 km/h. Tìm vận tốc thực của canô.
- Bài 13:** Một tàu thủy chạy trên một khúc sông dài 80 km, cả đi và về mất 8 giờ 20 phút. Tìm vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.
- Bài 14:** Lúc 4 giờ 30 phút một máy bay cất cánh từ A với vận tốc 500km/h. Đến B máy bay nghỉ 30 phút rồi quay về A với vận tốc 400 km/h và tới A lúc 11 giờ 45 phút. Tính quãng đường AB.
- Bài 15:** Hai xe khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm A và B, cách nhau 130 km và gặp nhau sau 2 giờ. Tính vận tốc mỗi xe, biết xe đi từ B có vận tốc nhanh hơn xe đi từ A là 5km/h.
- Bài 16:** Một ô tô đi từ A đến B. Sau khi đi được 43km thì nghỉ 40 phút. Để về B kịp giờ đã định, ô tô đi với vận tốc bằng 1,2 vận tốc lúc đầu. Tính vận tốc lúc đầu biết quãng đường AB dài 163km.
- Bài 17:** Đường sông từ A đến B ngắn hơn đường bộ 10km. Để đi từ A đến B, canô đi hết 3 giờ 20 phút, ô tô đi hết 2 giờ. Vận tốc canô kém vận tốc ô tô 17km/h. Tính vận tốc canô? (Thay đổi phương tiện).
- Bài 18:** Nhà A cách trường 1200m, nhà B cách trường 1650m. Vận tốc A bằng vận tốc B, thời gian B đến trường nhiều hơn A là 5 phút. Tính vận tốc của mỗi người.

- Bài 19:** Một xe hơi đi từ A đến C, cùng lúc đó từ một địa điểm B nằm trên đoạn đường AC có một ô tô tải cũng đi đến C. Sau 5 giờ hai ô tô gặp nhau tại C. Biết vận tốc ô tô tải bằng $\frac{3}{5}$ vận tốc xe hơi. Hỏi xe hơi đi từ A đến B mất bao lâu.

Bài 20: Quãng đường AB dài 270km. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc đi từ A đến B. Ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai 12km/h nên đến trước ô tô thứ hai 42 phút. Tìm vận tốc mỗi xe?

Bài 21: Một xe đồ đi từ A đến B với vận tốc 20 km/h. Sau 3 giờ, từ A một xe hơi đuổi theo với vận tốc 50 km/h. Hỏi từ lúc bắt đầu xuất phát xe hơi đuổi kịp xe đồ mất bao lâu?

Bài 22: Một chiếc thuyền khởi hành từ bến sông A. Sau 5 giờ 20 phút một canô từ bến sông A đuổi theo và gặp thuyền cách bến A 20 km. Hỏi vận tốc của thuyền, biết canô chạy nhanh thuyền 12 km một giờ?

LOẠI KHÁC

Bài 1: Trong một trang sách, nếu bớt đi 4 dòng và mỗi dòng bớt đi 3 chữ thì cả trang bớt đi 136 chữ, nếu tăng thêm 3 dòng và mỗi dòng thêm 2 chữ thì cả trang sẽ tăng thêm 109 chữ. Tính số dòng trong trang sách và số chữ có trong mỗi dòng.

Bài 2: Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi là 56m. Nếu giảm chiều rộng 2m và tăng chiều dài 4 m thì diện tích tăng thêm 8m². Tìm độ dài các cạnh của hình chữ nhật.

Bài 3: Một miếng vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Nếu tăng mỗi cạnh thêm 5m thì diện tích vườn thêm 385m². Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn trên.

Bài 4: Cho một tam giác vuông. Nếu tăng các cạnh góc vuông lên 2cm và 3cm thì diện tích tam giác tăng thêm 50cm². Nếu giảm cả hai cạnh đi 2cm thì diện tích sẽ giảm đi 32cm². Tính độ dài hai cạnh góc vuông.

Bài 5: Cạnh huyền của một tam giác vuông là 10m. Hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 2m. Tìm các cạnh góc vuông.

Bài 6: Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 10m, diện tích bằng 1200m². Tính chu vi khu vườn.

Bài 7: Hiệu số đo chu vi của hai hình vuông là 32m và hiệu số đo diện tích của chúng là 464m². Tìm số đo mỗi cạnh hình vuông.

Bài 8: Một đội xe cần chuyên chở 120 tấn hàng. Hôm làm việc có 2 xe phải đi đến nơi khác nên mỗi chiếc xe còn lại phải chở thêm 16 tấn. Hỏi đội xe có bao nhiêu xe?

Bài 23: Cho tam giác ABC cân tại A có BH và CK là hai đường cao.
Chứng minh:

- 1) $\triangle ABH = \triangle ACK$.
- 2) BCHK là hình thang cân.

Bài 24: Cho tam giác ABC cân tại A có BD và CE là hai đường phân giác. Chứng minh:

- 1) $\triangle AEC = \triangle ADB$.
- 2) BCDE là hình thang cân.

Bài 25: Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) có $AB = AD$.

- 1) Chứng minh $\widehat{ADB} = \widehat{BDC}$.
- 2) CA có phải là tia phân giác của góc C không? Vì sao?

Bài 26: Hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB < CD$. Gọi O là giao điểm của AD và BC; E là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

- 1) $\triangle AOB$ cân tại O.
- 2) $\triangle ABD = \triangle BAC$.
- 3) $EC = ED$.
- 4) OE là đường trung trực chung của hai đáy AB và CD.

Bài 27: Cho tam giác đều ABC và điểm M tùy ý nằm trong tam giác. Kẻ tia $Mx \parallel BC$ cắt AB ở D, tia $My \parallel AC$ cắt BC ở E. Chứng minh rằng:

- 1) Tứ giác MDBE là hình thang cân.
- 2) Tính số đo góc DME.
- 3) So sánh MB và DE.

Bài 28: Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có $AD = AB$ và $\widehat{D} = 60^\circ$.

- 1) Tính các góc của hình thang.
- 2) Chứng minh DB là tia phân giác của góc D.
- 3) $\triangle BCD$ là tam giác gì? Vì sao?

Bài 29: Cho hình thang cân ABCD ($AD \parallel BC$) có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AD = 4\text{cm}$ và $BC = 2\text{cm}$. Qua B kẻ đường thẳng song song với CD cắt AD ở E.

- 1) Tính ED.
- 2) Chứng minh $\triangle ABE$ đều.
- 3) Kẻ $BH \perp AD$ ở H. Tính AH.

II. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 30: Cho tứ giác lồi ABCD có $\widehat{A} = \widehat{B}$ và $BC = AD$. Chứng minh:

- 1) $\triangle DAB = \triangle CBA$, rồi suy ra $BD = AC$.
- 2) $\triangle ACD = \triangle BDC$, rồi suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.
- 3) ABCD là hình thang cân.

Bài 31: Cho tứ giác lồi ABCD có $\widehat{A} = \widehat{B}$ và $BC = AD$.

Chứng minh rằng:

- 1) $\triangle ACD = \triangle BDC$.
- 2) ABCD là hình thang cân.

Bài 32: Cho tam giác ABC cân tại A có các đường phân giác BE và CF.

Chứng minh:

- 1) $\triangle AEF$ cân tại A.
- 2) Tứ giác BCEF là hình thang cân.
- 3) $CE = EF = FB$.

Bài 33: Cho tam giác ABC cân tại A có đường cao AH và đường phân giác AC sao cho $AE = AD$.

- 1) Tứ giác BDEC là hình gì? Vì sao?
- 2) Xác định vị trí của các điểm D, E để có $BD = DE = EC$.

Bài 34: Tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{B}$, $BC = CD$ và DB là tia phân giác của góc D. Chứng minh:

- 1) Tứ giác ABCD là hình thang vuông.
- 2) $AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$.

Bài 35: Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ BC bằng 4cm. Qua B vẽ đường thẳng song song với CD cắt AD ở E. Biết chu vi tam giác ABE bằng 12cm.

- 1) Chứng minh $BC = ED$; $BE = CD$.
- 2) Tính chu vi hình thang ABCD.

Bài 36: Cho hình thang ABCD ($AD \parallel BC$, $AD < BC$). Qua B vẽ đường thẳng song song với CD cắt AD tại E. Biết chu vi tam giác ABE bằng 20cm và chu vi hình thang ABCD bằng 26cm. Tính BC.

Bài 37: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 13,4\text{cm}$; $AB = \frac{1}{3}CD$ và

chiều cao AH bằng trung bình cộng của hai đáy. Tính AH và S_{ABCD} .

Bài 38: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 4\text{cm}$, $CD = 8\text{cm}$ và $S_{ABCD} = 30\text{cm}^2$. Tính chiều cao AH của hình thang.

Bài 39: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $CD = 50,8\text{cm}$, $AB = \frac{1}{4}CD$ và

$S_{ABCD} = 635\text{cm}^2$. Tính chiều cao của hình thang ABCD.

Bài 40: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) chiều cao AH = 15,2cm;

$AB - CD = 7,3\text{cm}$ và $S_{ABCD} = 336,68\text{cm}^2$. Tính:

- 1) Tổng $AB + CD$.
- 2) Độ dài AB, CD.

Bài 41: Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 7\text{cm}$, $CD = 10\text{cm}$, $AD = 8\text{cm}$ và $\widehat{D} = 30^\circ$. Kẻ AH vuông góc CD ở H, kéo dài AH lấy E sao cho $HE = HA$.

- 1) Chứng minh $\triangle ADE$ đều.
- 2) Tính AH, S_{ADE} và S_{ABCD} .

Bài 42: Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có $\widehat{D} = 60^\circ$, $AB = 15\text{cm}$ và $CD = 49\text{cm}$. Qua B vẽ đường thẳng song song với AD cắt CD tại E.

- 1) Chứng minh $\triangle BCE$ đều.
- 2) Tính EC và chu vi hình thang ABCD.

- 3) Tìm $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}}$.

Bài 43: Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) có AH, BK là các đường cao. Chứng minh:

- 1) $\triangle AHD = \triangle BKC$
- 2) $DH = \frac{CD - AB}{2}$

Bài 44: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có đáy nhỏ AB = 6cm; CD = 14cm và AD = 5cm.

- 1) Chứng minh $DH = \frac{CD - AB}{2}$. 2) Tính DH, AH và S_{ABCD} .

Bài 45: Hình thang cân ABCD (AB // CD) có đáy nhỏ AB = b, đáy lớn CD = a (với a, b cùng đơn vị đo độ dài), đường cao AH.

- 1) Chứng minh rằng $HD = \frac{a - b}{2}$, $HC = \frac{a + b}{2}$.

- 2) Cho a = 26cm, b = 10cm và AD = 17cm. Tính AH và S_{ABCD} .

Bài 46: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có E, G lần lượt là trung điểm của AB, CD. Biết GA = $\sqrt{18}$ cm, GE = 3cm và EC = 5cm.

- 1) Chứng minh: EG vuông góc AB.
2) Tính AE, GC và S_{ABCD} .

Bài 47: Hình thang ABCD cân có $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$, đáy lớn AB = 2,7cm, AD = BC = 1cm. Tính CD và S_{ABCD} .

Bài 48: Hình thang cân ABCD (AB // CD) có DB vuông góc BC và DB là tia phân giác của góc D.

- 1) Chứng minh $\widehat{BCD} = 2\widehat{BDC}$.
2) Tính số đo các góc của hình thang.
3) Với BC = 3cm. Tính chu vi và diện tích của hình thang ABCD.

Bài 49: Cho hình thang ABCD (AD // BC, AD < BC). Kẻ DE // AB, DH ⊥ BC (E, H thuộc BC). Biết AD = 5cm, DH = 4cm và $S_{CDE} = 6\text{cm}^2$.

- 1) Tính EC. 2) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle EDA$.
3) Tính BC và S_{ABCD} .

Bài 50: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$ và O là giao điểm của hai đường chéo.

- 1) Chứng minh OC = OD.
2) $\triangle AOB$ là tam giác gì? Vì sao?
3) Chứng minh ABCD là hình thang cân.

- 4) Tính $\frac{S_{ACD}}{S_{BCD}}$ và $\frac{S_{AOD}}{S_{BOC}}$.

Bài 51: Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < CD). Kẻ AH ⊥ BD ở H, BK ⊥ AC ở K sao cho AH = BK. Chứng minh:

- 1) $A_{ABC} = S_{BDA}$ 2) ABCD là hình thang cân.

Bài 52: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng:

- 1) $S_{DAB} = S_{CAB}$ 2) $S_{ADC} = S_{BDC}$ 3) $S_{AOD} = S_{BOC}$.

Bài 53: Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh BC. Từ điểm D trên cạnh AB kẻ đường thẳng song song với BC cắt AM, AC lần lượt tại N và E. Chứng minh:

- 1) $S_{DMB} = S_{EMC}$, $S_{AMB} = S_{AMC}$
2) Khoảng cách từ D và E đến AM bằng nhau.
3) $S_{AND} = S_{ANE}$
4) N là trung điểm của DE.

Bài 54: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Chứng minh rằng:

- 1) $S_{BDE} = S_{CDE}$ 2) $\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}} = \frac{AD}{DB}$; $\frac{S_{ADE}}{S_{CDE}} = \frac{AE}{EC}$
3) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ 4) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$; $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.

Bài 55: Cho tam giác OCD. Từ điểm A trên cạnh OD kẻ đường thẳng song song với CD cắt cạnh OC ở B. Kẻ AH ⊥ OC, DK ⊥ OC (H, K thuộc OC). Chứng minh:

- 1) $\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{AB}{CD} = \frac{AH}{DK}$ 2) $\frac{S_{OAB}}{S_{ODB}} = \frac{AH}{DK} = \frac{OA}{OD}$
3) $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OD}$.

Bài 56: Cho hình thang ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, AB = 4cm và AB = BC = 2CD. Kẻ CH ⊥ AB ở H.

- 1) Chứng minh: $\triangle AHC = \triangle CDA$, rồi suy ra H là trung điểm của AB.
2) So sánh AC và BC.
3) Tính \widehat{ABC} và \widehat{BCD} .
4) Tính S_{ABCD} .

Bài 57: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB < CD. Qua B vẽ đường thẳng song song với AD cắt CD tại E. Chứng minh:

- 1) AD = BE, AB = DE. 2) EC = CD - AB
3) CD - AB < AD + BC

Bài 58: Cho hình thang ABCD (AB // CD), AB < CD, BC < AD. Qua B vẽ đường thẳng song song với AD cắt CD tại E. Chứng minh:

- 1) CD - AB = EC 2) AD + BC > CD - AB > AD - BC

Bài 59: Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < DC). Qua B vẽ đường thẳng song song với AD cắt DC tại E.

- 1) Chứng minh rằng $\hat{A} = \widehat{DEB}$ và $\hat{A} > \hat{C}$
2) So sánh \hat{D} và \widehat{ABE} ; \hat{B} và \hat{D}
3) Chứng minh $\hat{A} + \hat{B} > \hat{C} + \hat{D}$

Bài 60: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB < CD và $\hat{D} > \hat{C}$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ DC chứa hình thang, vẽ tia Cx sao cho $\widehat{xCD} = \hat{D}$; Cx cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh:

- 1) AECD là hình thang cân. 2) $\widehat{DBE} > \widehat{DAE}$; $\widehat{DBE} > \widehat{CEA}$
3) DE > DB, rồi suy ra AC > DB.

Bài 61: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB > CD và $\hat{D} > \hat{C}$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ DC chứa hình thang, vẽ tia Cx sao cho $\widehat{xCD} = \widehat{ADC}$; Cx cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh rằng:

- 1) $\widehat{DBE} > \widehat{DAE}$; $\widehat{DBE} > \widehat{CEA}$ 2) DE > DB, AC > DB.

Bài 62: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) có BD > AC. Qua B vẽ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng DC tại E. Chứng minh:

- 1) $AC = BE$
- 2) $BD > BE$
- 3) $\widehat{ACD} > \widehat{BDC}$

Bài 63: Cho tam giác đều ABC và điểm M tùy ý nằm trong tam giác. Kẻ tia $Mx \parallel BC$ cắt AB ở D, tia $My \parallel AC$ cắt BC ở E, tia $Mz \parallel AB$ cắt AC ở F.

- 1) Chứng minh: các tứ giác MFAD, MDBE và MECF là những hình thang cân.
- 2) So sánh: \widehat{DMF} , \widehat{DME} và \widehat{EMF} .
- 3) Chứng minh: $MA = DF$, $MB = DE$, $MC = EF$.
- 4) Giả sử $MA > MB$ và $MA > MC$. So sánh MA với tổng $MB + MC$.

III. BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1: Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 2\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$ và $\widehat{C} = 45^\circ$

- 1) ABCD là tam giác gì? Vì sao?
- 2) Chứng minh DB là tia phân giác của góc D.
- 3) Tính S_{ABCD} .

Bài 2: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $CD = AD + BC$. Gọi K là điểm thuộc đáy CD sao cho $KD = AD$. Chứng minh AK, KB theo thứ tự là hai tia phân giác của hai góc A và B.

Bài 3: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $CD = AD + BC$. Gọi K là giao điểm của các tia phân giác của các góc A và B. Chứng minh C, K, D thẳng hàng.

Bài 4: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có E thuộc cạnh BC sao cho DE là tia phân giác góc D và $\widehat{AED} = 90^\circ$. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng AE và DC.

- 1) Chứng minh $\triangle ADK$ cân ở D.
- 2) Chứng minh E là trung điểm của BC.
- 3) Biết $AD = 10\text{cm}$, $AE = 6\text{cm}$. Tính S_{ABCD} .

Bài 5: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có E là trung điểm của BC và DE là tia phân giác góc D. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng AE và DC. Chứng minh rằng:

- 1) $\triangle ABE = \triangle KCE$.
- 2) $\triangle ADK$ cân ở D.
- 3) $\widehat{AED} = 90^\circ$.
- 4) $S_{ABCD} = S_{ADK}$.

Bài 6: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có E là trung điểm của BC và $\widehat{AED} = 90^\circ$. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng AE và DC. Chứng minh rằng:

- 1) $\triangle ABE = \triangle KCE$.
- 2) $\triangle ADK$ cân tại D.
- 3) DE là tia phân giác của góc D.
- 4) $S_{ADK} = S_{ABCD}$.

Bài 7: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có E là trung điểm của BC và $\widehat{AED} = 90^\circ$. Chứng minh rằng: DE là tia phân giác của góc D.

Bài 8: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có E thuộc cạnh BC sao cho DE là tia phân giác góc D và $\widehat{AED} = 90^\circ$. Chứng minh E là trung điểm của BC.

Bài 9: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có E là trung điểm của BC và DE là tia phân giác góc D. Chứng minh $\widehat{AED} = 90^\circ$.

Bài 10: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có O là giao điểm của hai đường chéo. Biết $S_{AOB} = 4\text{cm}^2$ và $S_{AOD} = 9\text{cm}^2$. Tính S_{BOC} và S_{ABCD} .

Bài 11: Cho tứ giác lồi ABCD có $\widehat{A} = \widehat{B}$ và $BC = AD$. Chứng minh ABCD là hình thang cân.

Bài 12: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB > CD$). Chứng minh: $|AD - BC| < AB - CD < AD + BC$

Bài 13: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD < BC$). So sánh: $BC - AD$ với $AB - CD$ và $AD + BC$.

Bài 14: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB < DC$. Chứng minh rằng:

- 1) $DC - AB < AD + BC$
- 2) $\widehat{A} + \widehat{B} > \widehat{C} + \widehat{D}$

Bài 15: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) có $\widehat{A} < \widehat{B}$. Chứng minh: $BD < AC$.

Bài 16: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) có $BD > AC$. Chứng minh $\widehat{ACD} > \widehat{BDC}$.

Bài 17: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) có $\widehat{C} > \widehat{D}$. Chứng minh:

- 1) $BD > AC$.
- 2) $\widehat{ACD} > \widehat{BDC}$

Bài 18: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\widehat{BDC} > \widehat{ACD}$. Chứng minh rằng: $AC > BD$

Bài 19: Cho tam giác đều ABC, điểm M bất kì nằm trong tam giác sao cho $MA > MB$ và $MA > MC$. Chứng minh $MA < MB + MC$.

Bài 20: Tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB và điểm E trên cạnh AC sao cho $AD = AE$. Chứng minh $2BE > BC + DE$.

ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC – HÌNH THANG

Bài 1: Cho tam giác ABC có $AB = 5\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$, $BC = 9\text{cm}$. Kéo dài AB lấy điểm D sao cho $BD = BA$, kéo dài AC lấy điểm E sao cho $CE = CA$. Kéo dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC lấy $MI = MA$. Chứng minh:

- 1) Tính độ dài các cạnh tam giác ADE.
- 2) $DI \parallel BC$.
- 3) Ba điểm D, I, E thẳng hàng.

Bài 2: Cho tam giác ABC có độ dài $BC = a$ và M là trung điểm của AB. Tia $Mx \parallel BC$ cắt AC tại N.

- 1) Chứng minh N là trung điểm của AC.
- 2) Tính độ dài đoạn thẳng MN theo a.

Bài 3: Cho tam giác MNP có $MN = 4\text{cm}$, $MP = 6\text{cm}$, $NP = 8\text{cm}$. Kéo dài MN lấy điểm I sao cho $NI = NM$, kéo dài MP lấy điểm K sao cho $PK = PM$,

kéo dài đường trung tuyến MO của tam giác MNP lấy OS = OM.

- 1) Tính độ dài các cạnh của tam giác MIK.
- 2) Chứng minh ba điểm I, S, K thẳng hàng.
- 3) Chứng minh $S_{MIK} = 4S_{MNP}$.

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A có M là trung điểm BC. Kẻ $Mx \parallel AC$ cắt AB tại E, kẻ $My \parallel AB$ cắt AC tại F. Chứng minh rằng:

- 1) E, F là trung điểm của AB và AC.
- 2) $EF = \frac{1}{2}BC$.
- 3) $ME = MF$, $AE = AF$.

Bài 5: Cho tam giác OPQ cân tại O có I là trung điểm của PQ. Kẻ $IM \parallel OQ$ (M thuộc OP), $IN \parallel OP$ (N thuộc OQ). Chứng minh rằng:

- 1) Tam giác IMN cân tại I.
- 2) OI là đường trung trực của MN.

Bài 6: Cho tam giác ABC cân tại A có AM là đường cao. N là trung điểm của AC. Kẻ $Ax \parallel BC$ cắt MN tại E. Chứng minh rằng:

- 1) M là trung điểm của BC.
- 2) $ME \parallel AB$.
- 3) $AE = MC$.

Bài 7: Cho tam giác ABC, trên nửa mặt phẳng bờ là AC không chứa điểm B. Lấy điểm D bất kỳ. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, AD. Chứng minh:

- 1) $MN \parallel PQ$ và $MQ \parallel NP$.
- 2) $MN + NP + PQ + MQ = AC + BD$.

Bài 8: Cho tam giác ABC có đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB$ tại E kéo dài HE lấy $EM = EH$. Kẻ $HF \perp AC$ tại F, kéo dài HF lấy $FN = FH$. Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng:

- 1) AB là trung trực của MH và AC là trung trực của HN.
- 2) Tam giác AMN cân.
- 3) $EF \parallel MN$.
- 4) $AI \perp EF$.

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A có M là trung điểm của đường cao AH, CM cắt AB tại D, kẻ $Hx \parallel CD$ và cắt AB tại E. Chứng minh rằng:

- 1) $DA = DE$
- 2) $AB = 3AD$
- 3) $CD = 4MD$

Bài 10: Cho tam giác ABC có $AB : AC : BC = 3 : 4 : 6$. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AB, AC và BC. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết chu vi tam giác MNP bằng 5,2cm.

Bài 11: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 36cm. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AB, AC và BC. Tính độ dài các cạnh của tam giác MNP biết $NP : NM : MP = 4 : 3 : 2$.

Bài 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có AM là đường trung tuyến. Gọi N là trung điểm của AC

- 1) Chứng minh $MN \perp AC$.
- 2) Tam giác AMC là tam giác gì? Vì sao?
- 3) Chứng minh $2AM = BC$.

Bài 13: Cho tam giác ABC nhọn có hai đường cao BD và CE. Gọi M, N là trung điểm của BC và DE. Chứng minh rằng:

- 1) $DM = \frac{1}{2}BC$.
- 2) Tam giác DME cân.
- 3) $MN \perp DE$.

Bài 14: Cho tam giác ABC trên AC lấy theo thứ tự điểm D và E sao cho $AD = DE = EC$. Gọi M là trung điểm của BC, BD cắt AM tại I. Chứng minh rằng:

- 1) $ME \parallel BD$.
- 2) I là trung điểm của AM.
- 3) $ID = \frac{1}{4}BD$.

Bài 15: Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến. Lấy D thuộc AC sao cho $AD = \frac{1}{2}DC$. Kẻ $ME \parallel BD$ (E thuộc CD), BD cắt AM tại I.

Chứng minh rằng:

- 1) $AD = DE = EC$
- 2) I là trung điểm AM
- 3) $S_{AIB} = S_{IMB}$
- 4) $S_{ABC} = 2S_{BIC}$

Bài 16: Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến. Gọi D là trung điểm của AM, BD cắt AC tại E. Kẻ $MK \parallel BE$ (K thuộc EC). Chứng minh rằng:

- 1) K là trung điểm của CE.
- 2) $CE = 2AE$

Bài 17: Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến. Gọi D là trung điểm của AM, BD cắt AC tại I. Chứng minh $AI = \frac{1}{2}CI$.

Bài 18: Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của GB và GC. Chứng minh rằng:

- 1) $DE \parallel IK$ và $DE = IK$
- 2) $\triangle DEK = \triangle IKE$.

Bài 19: Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G. Gọi I, K là trung điểm của GB và GC. Chứng minh rằng:

- 1) $IE \parallel DK$ và $IE = DK$
- 2) $S_{DEI} = S_{DIK}$.

Bài 20: Cho tam giác ABC có H là trực tâm, M là trung điểm của BC. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM cắt AB và AC tại E và F, trên tia đối của tia HC lấy $HD = HC$. Chứng minh rằng:

- 1) $HM \parallel BD$
- 2) E là trực tâm của tam giác HBD
- 3) $DE \parallel AC$
- 4) $EH = HF$

Bài 21: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$; $AB < CD$) và $AB = BC$

- 1) Chứng minh CA là tia phân giác của góc BCD
- 2) Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC và BD. Chứng minh M, N, E, F thẳng hàng.

Bài 22: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$ và $AB < CD$). Trên AD lấy $AE = EM = MP = PD$. Trên BC lấy $BF = FN = NQ = QC$

- 1) Chứng minh M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC
- 2) Tứ giác EFQP là hình gì? Vì sao?
- 3) Tính MN, EF, PQ biết $AB = 8\text{cm}$ và $CD = 12\text{cm}$
- 4) Kẻ $AH \perp CD$ tại H và $AH = 10\text{cm}$. Tính S_{ABCD} .

Bài 23: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$ và $AB < CD$). Trên AD lấy $AE = EF = FG = GD$. Từ E, F, G dựng các đường thẳng song song với hai đáy cắt BC lần lượt tại M, N và P.

- 1) Chứng minh $BM = MN = NP = PC$
- 2) Tính GP, EM, AB biết $CD = 10\text{cm}$, $FN = 6\text{cm}$.
- 3) Chứng minh $S_{ABD} = 4S_{ABE}$ và $S_{CDNF} = 2S_{ABNF}$

Bài 24: Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy $AD = DE = EB$. Từ D, E kẻ các đường thẳng cùng song song với BC cắt cạnh AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng:

- 1) M là trung điểm của AN
2) AM = MN = NC
3) 2EN = DM + BC
4) $S_{ABC} = 3S_{AMB}$
- Bài 25:** Cho tam giác MNP có MI là đường trung tuyến của tam giác. Trên MP lấy theo thứ tự MK = KH = HP, NK cắt MI tại O.
1) Tứ giác OKHI là hình gì? 2) Chứng minh NO = 3OK
3) So sánh S_{MNI} và S_{MIP}
- Bài 26:** Cho hình thang ABCD (AB // CD) có đường cao AH = 3cm và AB = 5cm, CD = 8cm. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của AD, BC và AC

- 1) Chứng minh E, I, F thẳng hàng
2) Tính S_{ABCD}
3) So sánh S_{ADC} và $2S_{ABC}$
- Bài 27:** Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của AD, BC và AC
1) Chứng minh: EI // CD và IF // AB
2) Chứng minh: $EF \leq \frac{AB + CD}{2}$
3) Tứ giác ABCD phải có điều kiện gì thì $EF = \frac{AB + CD}{2}$

- Bài 28:** Cho hình thang ABCD (AB // CD). M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BC. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của MN với BD, AC. Cho AB = 6cm, CD = 14cm

- 1) Tính các độ dài MI, IK, KN
2) Tính S_{ABNM} , biết đường cao của hình thang ABCD là 8cm.
- Bài 29:** Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BD và CE. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BE và CD. Gọi I, K là giao điểm của MN với BD và CE. Chứng minh rằng:

- 1) EDCB là hình thang
2) I là trung điểm của BD và K là trung điểm của CE
3) MI = IK = KN.
- Bài 30:** Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi M, I, K, N lần lượt là trung điểm của AD, BD, AC, BC. Chứng minh rằng:

- 1) M, I, K thẳng hàng
2) $MK = \frac{1}{2}CD$ và $MI = \frac{1}{2}AB$.
3) $IK = \frac{CD - AB}{2}$

- Bài 31:** Cho hình thang ABCD có AB // CD (AB < CD), AB = a, BC = b, CD = c, AD = d. Các đường phân giác của các góc ngoài đỉnh A và D cắt nhau tại M, các đường phân giác của các góc ngoài đỉnh B và C cắt nhau tại N. AM và BN lần lượt cắt đường thẳng CD tại P và Q.

- 1) Chứng minh tam giác AMD và tam giác BNC vuông
2) Chứng minh tam giác ADP và tam giác BCQ cân
3) Chứng minh MN // CD
4) Tính độ dài MN theo a, b, c, d (có cùng đơn vị đo)

- Bài 32:** Cho hình thang MNPQ (MN // PQ). Các đường phân giác của các góc ngoài đỉnh M và Q cắt nhau tại I. Các đường phân giác của

- các góc ngoài đỉnh N và P cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:
1) MI ⊥ IQ và NK ⊥ PK
2) IK // PQ.

- Bài 33:** Cho tứ giác ABCD có P, I, Q lần lượt là trung điểm của AD, BD, BC.

- 1) Chứng minh $PI + IQ = (AB + CD) \cdot \frac{1}{2} \geq PQ$
2) Giả sử có $PQ = \frac{AB + CD}{2}$. Chứng minh rằng: P, I, Q thẳng hàng

- Bài 34:** Cho tứ giác ABCD có P, I và Q lần lượt là trung điểm của AD, BD và BC.

- 1) So sánh PI + IQ với AB + CD.
2) Giả sử có $PQ = \frac{AB + CD}{2}$. Chứng minh AB // CD.

- Bài 35:** Vẽ ra phía ngoài tam giác nhọn ABC các tam giác vuông cân ABD và ACE ở B và C. Gọi M là trung điểm của DE, kẻ DN, AH, MI, EK cùng vuông góc với BC tại N, H, I, K. Chứng minh rằng:

- 1) I là trung điểm của NK
2) $\triangle DNB = \triangle BHA$ và $\triangle EKC = \triangle CHA$
3) I là trung điểm của BC
4) Tam giác CMB vuông cân ở M.

- Bài 36:** Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Qua G vẽ đường thẳng d cắt hai cạnh AB và AC. Gọi I, M là trung điểm của AG và BC. Gọi A', B', C', I', M' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, I, M trên d

- 1) Chứng minh: GI = GM và $II' = \frac{1}{2}AA'$
2) Tìm hệ thức liên hệ giữa các độ dài AA', BB', CC'
- Bài 37:** Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A vẽ đường thẳng d không song song với BC. Gọi I là trung điểm của AB, K là trung điểm của CG. Gọi A', B', C', I', K', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, I, K, G trên d

- 1) Chứng minh: CK = KG = GI
2) Chứng minh: $C'K' = K'G' = G'I'$ và I' là trung điểm của A'B'
3) Tìm hệ thức liên hệ giữa các độ dài AA', BB', CC' với GG'

- Bài 38:** Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) có AH là đường cao. Trên tia HC lấy điểm D sao cho HD = HB. Kẻ DE ⊥ AC ở E, HK ⊥ AC ở K.

- 1) So sánh KA và KE.
2) Chứng minh $\triangle AHE$ cân ở H.
3) Gọi M là trung điểm của DC. Chứng minh $\widehat{HEM} = 90^\circ$

Bài 2. HÌNH BÌNH HÀNH

I. BÀI TẬP CƠ BẢN

- Bài 1:** Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{DAB} = 60^\circ$. Tính số đo \widehat{ABC} , \widehat{BCD} , \widehat{CDA} .

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD có O là trung điểm của đường chéo AC. Chứng minh: B, O, D thẳng hàng.

Bài 3: Cho tứ giác ABCD có: $AD \parallel BC$; $\widehat{ABC} = 70^\circ$; $\widehat{BCD} = 110^\circ$. Chứng minh: tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD có: $AB = 6\text{cm}$; $BC = 4\text{cm}$; $CD = 6\text{cm}$; $AD = 4\text{cm}$. Chứng minh: tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có: $AB = 5\text{cm}$; $AB + BC = 12\text{cm}$; $BC + CD = 12\text{cm}$; $CD + AD = 12\text{cm}$. Chứng minh: tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 6: Cho tứ giác ABCD có: $\widehat{DAB} = 120^\circ$; $\widehat{ABC} = 60^\circ$; $\widehat{BCD} = 120^\circ$. Chứng minh: tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 7: Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Chứng minh: tứ giác BCDE là hình bình hành.

Bài 8: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến BM. Trên tia đối của tia MB lấy điểm D sao cho $MD = MB$. Chứng minh: tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 9: Cho hình thang ABCD có $AB \parallel CD$ và $AB = \frac{1}{2}CD$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Chứng minh: các tứ giác ABED, ABCE là các hình bình hành.

Bài 10: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh CD lấy điểm F sao cho $EF \parallel AD$.

- 1) Chứng minh rằng: $AE \parallel DF$; $BE \parallel CF$.
- 2) Chứng minh rằng: tứ giác AEFD là hình bình hành.
- 3) Chứng minh rằng: tứ giác BEFC là hình bình hành.

Bài 11: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh CD lấy điểm F sao cho $AE = DF$.

- 1) Chứng minh rằng: $AE \parallel DF$; $BE \parallel CF$.
- 2) Chứng minh rằng: $BE = CF$.
- 3) Chứng minh rằng: tứ giác AEFD là hình bình hành.
- 4) Chứng minh rằng: tứ giác BEFC là hình bình hành.

Bài 12: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh CD lấy điểm F sao cho $AE = CF$.

- 1) Chứng minh rằng: $AE \parallel CF$; $BE \parallel DF$.
- 2) Chứng minh rằng: $DE = DF$.
- 3) Chứng minh rằng: tứ giác AECF là hình bình hành.
- 4) Chứng minh rằng: tứ giác BEDF là hình bình hành.

Bài 13: Cho hình bình hành ABCD có M là trung điểm của AB và N là trung điểm của CD.

- 1) Chứng minh: tứ giác AMND là hình bình hành.
- 2) Chứng minh: tứ giác AMCN là hình bình hành.

Bài 14: Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một đường thẳng qua O cắt AB tại E và cắt CD tại F.

- 1) Chứng minh rằng: O là trung điểm của EF.

2) Chứng minh rằng: tứ giác AECF là hình bình hành.

3) Chứng minh rằng: tứ giác BEDF là hình bình hành.

Bài 15: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh CD lấy điểm F sao cho $AE = CF$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

1) Chứng minh: tứ giác AECF là hình bình hành.

2) Chứng minh: O là trung điểm của EF.

Bài 16: Cho hình bình hành ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn OA, OB, OC, OD.

1) Chứng minh rằng: tứ giác MNPQ là hình bình hành.

2) Chứng minh rằng: các tứ giác ANCQ, BPDM là các hình bình hành.

Bài 17: Cho hình bình hành ABCD có E là hình chiếu của A và F là hình chiếu của C lên đường chéo BD.

1) Chứng minh rằng: $\triangle ADE = \triangle CBF$.

2) Chứng minh rằng: tứ giác AECF là hình bình hành.

Bài 18: Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB.

1) Chứng minh: $DE \parallel AF$ và $DE = AF$.

2) Chứng minh: các tứ giác AEDF, BFED, CDFE là các hình bình hành.

Bài 19: Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1) Chứng minh rằng: $MN \parallel AC$; $MN = \frac{AC}{2}$.

2) Chứng minh rằng: $MN \parallel PQ$; $MN = PQ$.

3) Chứng minh rằng: tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Bài 20: Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD.

1) Chứng minh rằng: $MN \parallel BC$; $MN = \frac{BC}{2}$.

2) Chứng minh rằng: $MN \parallel PQ$; $MN = PQ$.

3) Chứng minh rằng: tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Bài 21: Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BE, CF và trọng tâm G. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BG và CG.

1) Chứng minh: $EF \parallel MN$; $EF = MN$.

2) Chứng minh: MNEF là hình bình hành.

Bài 22: Cho hình bình hành ABCD, có M và N là trung điểm của AB và CD. Chứng minh:

1) Tứ giác AMND là hình bình hành.

2) Tứ giác BMDN là hình bình hành.

Bài 23: Cho hình bình hành ABCD, có O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng qua O cắt AB ở M và CD ở N.

1) Chứng minh $OM = ON$.

2) Tứ giác AMCN là hình đặc biệt nào?

Bài 24: Cho hình bình hành ABCD có $AB < AD$. Tia phân giác của \hat{A} cắt BC ở I, tia phân giác của \hat{C} cắt AD tại K. Chứng minh:

- 1) Tam giác ABI là tam giác cân
2) So sánh \widehat{BIA} và \widehat{KCB}
3) Tứ giác AICK là hình bình hành.
- Bài 25:** Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q, E, F là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC, BD. Chứng minh:
1) $MN = PQ$ và $NP = MQ$ 2) $MF = PE$ và $ME = PF$
3) Tứ giác MEPF và MNPQ là hình bình hành
- Bài 26:** Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q, E, F là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC, BD. Chứng minh:
1) MNPQ là hình bình hành 2) NEQF là hình bình hành.
- Bài 27:** Cho hình bình hành ABCD có $AB > AD$. Kẻ AE, CF cùng vuông góc BD ($E, F \in BD$). Chứng minh:
1) $AE \parallel CF$ và $AE = CF$
2) Tứ giác AECF là hình gì? Vì sao?
- Bài 28:** Cho hình bình hành ABCD. $AB > AD$, vẽ $AE \perp BD$, $CF \perp BD$ ($E, F \in BD$). AE kéo dài cắt CD tại H và CF kéo dài cắt AB tại K. Chứng minh:
1) AECF là hình bình hành 2) AHCK là hình bình hành
- Bài 29:** Cho hình bình hành ABCD có M, N là trung điểm của AB và CD, AN và CM cắt BD ở E và F. Chứng minh:
1) $AM = CN$ và tứ giác AMCN là hình bình hành
3) F là trung điểm của BE và E là trung điểm của DF
- Bài 30:** Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ có $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu của D lên AC. Gọi M, N là trung điểm của HC và HD. Chứng minh:
1) $MN = AB$ 2) Tứ giác ABMN là hình bình hành
- Bài 31:** Cho hình bình hành ABCD tâm O, lấy $E \in CD$ sao cho: $ED = \frac{1}{3}DC$, AE cắt BD tại K. Từ O kẻ đường thẳng song song với AE, cắt CD ở F.
1) OF là gì của tam giác CAE. 2) Chứng minh $DE = FE = FC$.
3) Chứng minh K là trung điểm của OD.
- Bài 32:** Cho hình bình hành ABCD có M, N là trung điểm của AB và CD, AN và CM cắt BD ở E và F. Chứng minh:
1) Tứ giác AMCN là hình bình hành
3) $DE = EF = FB$
- Bài 33:** Tam giác ABC cân ở A có điểm D trên cạnh AB. Lấy điểm E trên tia đối của tia CA sao cho $CE = BD$. Kẻ $DF \parallel AC$ ($F \in BC$).
1) Định dạng tam giác DBF.
2) Chứng minh tứ giác DCEF là hình bình hành.
- Bài 34:** Lấy điểm M và N trên hai cạnh AB và BC của tam giác đều ABC sao cho $MN \parallel AC$. Lấy điểm P trên cạnh AC sao cho $\widehat{CNP} = 60^\circ$. Chứng minh tứ giác AMNP là hình bình hành.

- Bài 35:** Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của BC và CA. đường thẳng Ax \parallel BC cắt đường thẳng MN ở D. Chứng minh tứ giác ABMD và ADCM là hình bình hành.
- Bài 36:** Vẽ hình bình hành ABCD. Kéo dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC rồi lấy $ME = MA$.
1) Tứ giác ABEC là hình đặc biệt nào?
2) Chứng minh D, C, E thẳng hàng và suy ra C là trung điểm của DE.
- Bài 37:** Vẽ tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có đường trung tuyến AM. Lấy điểm D trên tia đối của tia MA sao cho $MD = MA$.
1) Chứng minh tứ giác ABDC là hình bình hành.
2) So sánh S_{ABD} với S_{ACD} .
- Bài 38:** Cho tam giác đều ABC. Lấy $D \in AB$; $E \in AC$; $F \in BC$ sao cho $\widehat{EDF} = 60^\circ$ và $\widehat{DFC} = 120^\circ$
1) Tính số đo \widehat{DEC}
2) Chứng minh tứ giác DECF là hình bình
- Bài 39:** Cho tam giác ABC. Kéo dài hai đường trung tuyến BM và CN rồi lần lượt lấy $MD = MB$ và $NE = NC$.
1) Các tứ giác ABCD và ACBE có dạng đặc biệt nào?
2) Chứng minh D, A, E thẳng hàng rồi suy ra điểm A là trung điểm của đoạn thẳng DE.
- Bài 40:** Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Vẽ tia Bx \parallel AC và tia Cy \parallel AB sao cho Bx và Cy cắt nhau ở D.
1) Tứ giác ABDC là hình đặc biệt gì?
2) Gọi M là trung điểm của BC, Chứng minh A, M, D thẳng hàng.
- Bài 41:** Tam giác ABC cân ở A có điểm M trên cạnh BC. Kẻ $MD \parallel AC$ và $ME \parallel AB$ ($D \in AB$; $E \in AC$).
1) Chứng minh tứ giác ADME là hình bình hành.
2) $\triangle EMC$ là tam giác gì?
3) So sánh $MD + ME$ với AC.
- Bài 42:** Cho hình thang ABCD có $AB \parallel CD$; $AB < DC$ và $AC \perp BD$. Kẻ $BE \parallel AC$ (E nằm trên đường thẳng DC).
1) Tứ giác ABEC là hình đặc biệt nào?
2) Chứng minh rằng: tam giác DBE vuông ở B và $BD^2 + AC^2 = DE^2$
- Bài 43:** Cho tứ giác ABCD có $AB = CD = 4\text{cm}$ và $AD = BC = 2\text{cm}$.
1) Chứng minh AC và BD có cùng một trung điểm là O.
2) Gọi I là trung điểm của CD, tính độ dài đoạn OI.

II. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

- Bài 1:** Cho hình bình hành ABCD, có M và N là trung điểm của AB và CD. Chứng minh:
1) Tứ giác AMND là hình bình hành
2) Tứ giác BMDN là hình bình hành
3) Gọi I là giao điểm của AC và MN. Chứng minh: I là trung điểm của AC từ đó suy ra AC, BD, MN đồng quy.

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD, có M và N là trung điểm của AD và BC. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh: AC, BD, MN đồng quy tại điểm O.

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD có $AB < AD$. Tia phân giác của \widehat{A} cắt BC ở I, tia phân giác của \widehat{C} cắt AD tại K.

1) Chứng minh tam giác ABI là tam giác cân.

2) So sánh \widehat{BIA} và \widehat{KCB}

3) Chứng minh tứ giác AICK là hình bình hành.

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD có E là trung điểm của AB, F là trung điểm của CD. Chứng minh: $DE = BF$.

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD có $AB > AD$. Kẻ AE, CF cùng vuông góc BD ($E, F \in BD$).

1) Chứng minh: $AE \parallel CF$ và $AE = CF$

2) Tứ giác AECF là hình gì? Vì sao?

3) Cho $AE = 12\text{cm}$, $BD = 18\text{cm}$. Tính S_{ABCD}

Bài 6: Cho hình bình hành ABCD. $AB > AD$, vẽ $AE \perp BD$, $CF \perp BD$ ($E, F \in BD$). AE kéo dài cắt CD tại H và CF kéo dài cắt AB tại K. Chứng minh:

1) AECF là hình bình hành

2) AHCK là hình bình hành

3) AC, BD, HK đồng quy.

Bài 7: Cho hình bình hành ABCD có M, N là trung điểm của AB và CD, AN và CM cắt BD ở E và F. Chứng minh:

1) $AM = CN$ và tứ giác AMCN là hình bình hành

2) F là trung điểm của BE.

3) $DE = EF = FB$.

Bài 8: Cho hình bình hành ABCD có M, N là trung điểm của AB và CD, AN và CM cắt BD ở E và F. Chứng minh:

1) Tứ giác AMCN là hình bình hành

2) $DE = EF = FB$

3) AC, BD, MN đồng quy.

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD tâm O, lấy $E \in CD$ sao cho: $ED = \frac{1}{3}DC$,

AE cắt BD tại K. Từ O kẻ đường thẳng song song với AE, cắt CD ở F.

Chứng minh:

1) F là trung điểm của EC.

2) $DE = FE = FC$.

3) K là trung điểm của OD.

Bài 10: Cho hình bình hành ABCD tâm O, lấy $E \in CD$ sao cho: $ED = \frac{1}{3}DC$,

AE cắt BD tại K. Từ O kẻ đường thẳng song song với AE, cắt CD ở F.

1) Chứng minh F là trung điểm của EC và $DE = FE = FC$.

2) Tính DO và DK biết $BD = 12\text{cm}$.

Bài 11: Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu của D lên AC. Gọi M, N là trung điểm của HC và HD. Chứng minh:

1) $MN = AB$

2) ABMN là hình bình hành

3) $MN \perp AD$.

Bài 12: Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có $AB = \frac{1}{2}CD$. Gọi

H là hình chiếu của D lên AC. Gọi M, N là trung điểm của HC và HD.

1) Chứng minh ABMN là hình bình hành

2) Chứng minh N là trực tâm của tam giác AMD

3) Chứng minh $\widehat{BMD} = 90^\circ$

4) Cho biết $CD = 16\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$. Tính S_{ABCD}

Bài 13: Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q, E, F là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC, BD. Chứng minh:

1) $MN = PQ$ và $NP = MQ$

2) $MF = PE$ và $ME = PF$

3) Tứ giác MEPF và MNPQ là hình bình hành

4) MP, NQ, EF đồng quy.

Bài 14: Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q, E, F là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC, BD. Chứng minh:

1) MNPQ là hình bình hành

2) MEPF là hình bình hành.

3) NEQF là hình bình hành.

Bài 15: Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AB = 10\text{cm}$; $AD = 15\text{cm}$. Tia phân giác của \widehat{A} cắt BC tại E. Chứng minh:

1) Tam giác ABE cân

2) Tính EC.

3) Tính S_{ABCD}

Bài 16: Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{B} = 120^\circ$, $AB = 10\text{cm}$, $AD = 15\text{cm}$. Tia phân giác của \widehat{A} cắt BC tại E.

1) Tính EC

2) Kẻ $BH \perp AH$ tại H. Tính BH

3) Tính S_{ABE}

Bài 17: Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$. Lấy $E \in AD$, $F \in CD$, sao cho $DE = CF$. Gọi K là điểm đối xứng của F qua BC. S là giao điểm của hai đường thẳng AK và AD. Chứng minh:

1) Tam giác CKF cân và tính \widehat{KCF} (I là giao điểm của BC và KF)

2) $SC = SD$

3) Tam giác SEK đều

4) $AB \parallel KE$.

Bài 18: Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$. Lấy $E \in AD$, $F \in CD$, sao cho $DE = CF$. Gọi K là điểm đối xứng của F qua BC. S là giao điểm của hai đường thẳng AK và AD. Chứng minh:

1) Tam giác SDC đều

2) $EK \parallel AB$.

Bài 19: Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$. Lấy hai điểm E, F thuộc AD và CD sao cho $DE = CF$. K là điểm đối xứng của F qua BC. Kẻ $KI \parallel CD$ ($I \in BC$)

- 1) Định dạng tam giác CKI
- 2) Tứ giác CDEI là hình đặc biệt nào? Vì sao?
- 3) Chứng minh $EK \parallel AB$.

III. BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1: Cho hình bình hành ABCD có $AB < AD$. Tia phân giác của \hat{A} cắt BC ở I, tia phân giác của \hat{C} cắt AD tại K. Chứng minh tứ giác AICK là hình bình hành.

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD. $AB > AD$, vẽ $AE \perp BD$, $CF \perp BD$ ($E, F \in BD$). AE kéo dài cắt CD tại H và CF kéo dài cắt AB tại K. Chứng minh:

- 1) Tứ giác AECF là hình bình hành
- 2) AC, BD, HK đồng quy.

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD tâm O, lấy $E \in CD$ sao cho: $ED = \frac{1}{3}DC$, AE cắt BD tại K. Từ O kẻ đường thẳng song song với AE, cắt CD ở F.

- 1) Chứng minh $DE = FE = FC$.
- 2) Tính DK, biết $BD = 12\text{cm}$.

Bài 4: Cho hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$) có $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu của D lên AC. Gọi M, N là trung điểm của HC và HD. Chứng minh:

- 1) ABMN là hình bình hành.
- 2) $\widehat{BMD} = 90^\circ$.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q, E, F là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC, BD. Chứng minh: MP, NQ, EF đồng quy.

Bài 6: Cho hình bình hành ABCD có $\hat{A} = 60^\circ$, $AB = 10\text{cm}$, $AD = 15\text{cm}$. Tia phân giác của \hat{A} cắt BC tại E.

- 1) Tính EC.
- 2) Tính S_{ABCD}

Bài 7: Cho hình bình hành ABCD có $\hat{A} = 60^\circ$. Lấy hai điểm E, F thuộc AD và CD sao cho $DE = CF$. K là điểm đối xứng của F qua BC. Chứng minh $EK \parallel AB$.

Bài 3. HÌNH CHỮ NHẬT

I. BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông ở A có AM là đường trung tuyến. Định dạng các tam giác ABM, ACM.

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông ở A có đường trung tuyến AM. Biết $AB = 6\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn BC, AM.

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông ở A có đường cao AH và đường trung tuyến AM.

- 1) Định dạng các tam giác AMB, AMC.
- 2) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{MCA}$; $\widehat{CAH} = \widehat{MBA}$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông ở A có đường cao AH và đường trung tuyến AM.

- 1) Chứng minh hai tam giác AMB và AMC là tam giác cân.
- 2) So sánh \widehat{BAH} với \widehat{MAC} ; \widehat{CAH} với \widehat{MAB} .

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông ở A có đường cao AH. Kẻ HD vuông góc với AB ở D và HE vuông góc với AC ở E.

- 1) Tứ giác ADHE là hình đặc biệt nào? Vì sao?
- 2) Gọi O là giao điểm của AH và DE. Chứng minh $OA = OH = OD = OE$.

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông ở A có đường trung tuyến AD. Kẻ $DH \parallel AC$ và $DK \parallel AB$ ($H \in AB$; $K \in AC$). Chứng minh:

- 1) H là trung điểm của AB và K là trung điểm của AC.
- 2) Tứ giác AHDK là hình chữ nhật.

Bài 7: Cho tam giác ABC cân ở A có M và N lần lượt là trung điểm của BC và AC. Đường thẳng MN cắt đường thẳng song song với BC kẻ từ A tại D.

- 1) Chứng minh tứ giác ABMD là hình bình hành.
- 2) So sánh MD với AC
- 3) Tứ giác ADCM là tứ giác đặc biệt nào? Vì sao?

Bài 8: Cho tam giác ABC cân ở A có M là trung điểm của BC và N là trung điểm của AC. Trên tia MN lấy điểm I sao cho N là trung điểm của đoạn thẳng MI.

- 1) So sánh MI với AB và AC.
- 2) Chứng minh tứ giác AICM là hình chữ nhật.

Bài 9: Cho tam giác đều ABC có M, N là trung điểm của BC và AC. Vẽ tia $Ax \parallel BC$ sao cho Ax cắt đường thẳng MN ở E.

- 1) So sánh ME với AC
- 2) Chứng minh tứ giác AMCE là hình chữ nhật.

Bài 10: Cho tam giác đều ABC có M và N lần lượt là trung điểm của BC và CA. Trên tia NM lấy điểm D sao cho M là trung điểm của ND.

- 1) So sánh ND với AB và BC
- 2) Chứng minh tứ giác BDCN là hình chữ nhật.

Bài 11: Vẽ hình bình hành ABCD, kẻ AH vuông góc với CD ở H và CK vuông góc với AB ở K.

- 1) Tính số đo \widehat{HAK}
- 2) So sánh AC và HK rồi suy ra AC, HK và BD có cùng một trung điểm.

Bài 12: Cho hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$; $AB = 10\text{cm}$; $AD = 12\text{cm}$; $CD = 15\text{cm}$. Lấy điểm E trên cạnh CD sao cho BE song song với AD.

1) Chứng minh tứ giác ABED là hình chữ nhật.

2) Tính độ dài các đoạn thẳng BE, DE, EC, BC.

Bài 13: Cho hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$; $AB = 10\text{cm}$; $CD = 18\text{cm}$; $BC = 17\text{cm}$. Kẻ BE vuông góc với CD ở E.

1) Chứng minh tứ giác ABED là hình chữ nhật

2) Tính độ dài các đoạn thẳng DE; EC; BE; AD

Bài 14: Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$; $AB < CD$) có AH, BK là hai đường cao.

1) Chứng minh tứ giác ABKH là hình chữ nhật

2) So sánh DH và CK

Bài 15: Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$; $AB < CD$) có hai đường cao là AH và BK.

1) Tứ giác ABKH là hình đặc biệt gì? Vì sao?

2) So sánh DH và CK

3) Chứng minh $DH = \frac{CD - AB}{2}$

Bài 16: Vẽ hình bình hành ABCD có AD vuông góc với AC. Kéo dài đường trung tuyến AI của tam giác ADC về phía I rồi lấy điểm E sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AE.

1) Tứ giác ADEC là tứ giác đặc biệt gì? Vì sao?

2) Chứng minh ba điểm B, C, E thẳng hàng

3) Điểm C là gì của đoạn thẳng BE?

Bài 17: Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1) Chứng minh: $MN \parallel PQ$ và $NP \parallel MQ$

2) Tính số đo \widehat{NMQ} .

Bài 18: Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1) Tính số đo \widehat{NMQ}

2) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Bài 19: Cho hình chữ nhật ABCD ($AB < AD$). Vẽ $\widehat{x\hat{A}y} = 90^\circ$ sao cho tia Ax cắt tia CD ở M và tia Ay cắt tia BC ở N. Kẻ tia Mz \parallel AN và tia Nt \parallel AM sao cho Mz cắt Nt ở P.

1) Chứng minh tứ giác AMPN là hình chữ nhật

2) Gọi O là giao điểm của AP và MN. Định dạng tam giác OAN

Bài 20: Cho hình chữ nhật ABCD ($AB < AD$). Vẽ $\widehat{x\hat{A}y} = 90^\circ$ sao cho tia Ax cắt tia CD ở M và tia Ay cắt tia BC ở N. Dựng tia Mz \parallel AN và tia Nt \parallel AM sao cho Mz cắt Nt ở P. Gọi O là giao điểm của AP và MN.

1) So sánh AP và MN

2) Chứng minh các tam giác OAM; OAN; ONP; OMP là tam giác cân.

Bài 21: Cho hình chữ nhật ABCD ($AB < AD$). Lấy điểm M trên tia CD và điểm N trên tia BC sao cho $\widehat{MAN} = 90^\circ$. Kẻ Mx \parallel AN và Ny \parallel AM sao cho Mx và Ny cắt nhau ở E. Gọi O là giao điểm của AE và MN.

1) Chứng minh tứ giác AMEN là hình chữ nhật

2) So sánh OA với OC.

Bài 22: Cho tam giác ABC cân ở A có đường cao AH. Vẽ tia Ax \parallel BC và tia Cy \parallel AH sao cho Ax cắt Cy ở D.

1) Chứng minh tứ giác ADCH là hình chữ nhật

2) Gọi N là giao điểm của AC và DH, biết $AB = 8\text{cm}$. Tính độ dài NH.

Bài 23: Cho tam giác ABC cân ở A có đường cao AH. Vẽ tia Ax \parallel BC và tia Cy \parallel AH sao cho Ax và Cy cắt nhau ở D.

1) Tứ giác ADCH là tứ giác đặc biệt gì? Vì sao?

2) Gọi N là giao điểm của AC và HD. Đường trung tuyến CM của tam giác ABC cắt AH ở G. G là gì của tam giác ABC?

3) Chứng minh B, G, N thẳng hàng.

Bài 24: Cho tam giác ABC cân ở A có đường cao AH. Từ điểm M trên đoạn thẳng HC kẻ Mx vuông góc với HC, tia Mx cắt tia phân giác ngoài đỉnh A của tam giác ABC ở D.

1) Tính số đo \widehat{HAD} .

2) Chứng minh tứ giác ADMH là hình chữ nhật.

II. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 3\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$; M là trung điểm của BC. Tính BC; AM.

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông ở A, có $AB = 6\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$; M là trung điểm của BC.

1) Tính BC.

2) Kẻ MH \parallel AC ($H \in AB$), MK \parallel AB ($K \in AC$). Tứ giác AHMK là hình gì?

Bài 3: Cho tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$; $BC = 10\text{cm}$. D là trung điểm của BC. Kẻ DH \perp AB ở H, DK \perp AC ở K.

1) Tính AD.

2) Chứng minh tứ giác AHDK là hình chữ nhật.

3) Tính S_{AHDK}

Bài 4: Cho hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$; $AB = 12\text{cm}$; $AD = 15\text{cm}$; $CD = 20\text{cm}$. Kẻ BE vuông góc CD tại E.

1) Tứ giác ABED là hình gì? Vì sao? Tính S_{ABED} .

2) Tính BE; EC; BC.

Bài 5: Cho hình thang vuông MNPQ có $\widehat{M} = \widehat{Q} = 90^\circ$; $MN = 16\text{cm}$; $NP = 17\text{cm}$; $PQ = 24\text{cm}$. Kẻ NE vuông góc PQ tại E.

1) Định dạng tứ giác MNEQ.

2) Tính QE; EP; MQ.

3) Tính S_{MNEQ} và S_{MNPQ}

Bài 6: Cho tam giác ABC đều có AM là đường trung tuyến và N là trung điểm AC. Vẽ Ax song song BC. Đường thẳng MN cắt Ax tại E.

- 1) Chứng minh $AB = ME$.
- 2) Chứng minh AMCE là hình chữ nhật.
- 3) Cho $AB = 16\text{cm}$. Tính MC; AM và S_{AMCE} .

Bài 7: Cho tam giác ABC có đường cao AD. Gọi E là trung điểm của AB và F là điểm đối xứng với D qua E. Chứng minh tứ giác ADBF là hình chữ nhật và so sánh AB với FD.

Bài 8: Cho hình bình hành MNPQ; vẽ ME vuông góc PQ ở E và PF vuông góc với MN ở F. Chứng minh:

- 1) $MP = EF$
- 2) MP, NQ, EF đồng quy

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm M di động trên BC; kẻ ME vuông góc AB tại E và MF vuông góc AC tại F

- 1) Tứ giác AE MF là hình gì? Vì sao?
- 2) Kẻ AI vuông góc BC tại I so sánh AM và AI.
- 3) Định vị trí M trên BC để EF nhỏ nhất.

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm M di động trên BC; kẻ MH vuông góc AB tại H và MK vuông góc AC tại K

- 1) Tứ giác AHMK là hình gì? Vì sao?
- 2) Định vị trí M trên BC để HK nhỏ nhất.

Bài 11: Tam giác ABC vuông ở A có đường trung tuyến AM. Trên tia AM lấy điểm I sao cho M là trung điểm của AI.

- 1) So sánh AI và BC.
- 2) Tứ giác ABIC là hình gì? Vì sao?

Bài 12: Cho hình chữ nhật ABCD tâm O, kẻ BH vuông góc AC ở H. Trên tia đối của tia BH lấy BE = AC

- 1) Tam giác BDE là tam giác gì? Vì sao?
- 2) Chứng minh $\widehat{HBO} = 2\widehat{BDE}$
- 3) Chứng minh $\widehat{HOB} = 2\widehat{ODC}$
- 4) Tính \widehat{EDC} ; \widehat{ADE}

Bài 13: Cho hình chữ nhật ABCD tâm I, kẻ BM vuông góc AC ở M. Trên tia đối của tia BM lấy BF = AC

- 1) Định dạng tam giác BDF và tam giác IDA.
- 2) Đặt $x = \widehat{BDF}$. Tính \widehat{MIB} và \widehat{MBI} theo x
- 3) Tính \widehat{ADF}

Bài 14: Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao, AM là đường trung tuyến. Qua H kẻ đường thẳng song song với AB và AC, lần lượt cắt AC ở E và AB ở D. DE cắt AH ở O và AM ở I

- 1) Tứ giác ADHE là hình gì? Vì sao?
- 2) Chứng minh $\widehat{IEA} = \widehat{HAC}$
- 3) Chứng minh $\widehat{IAE} = \widehat{HCA}$
- 4) Tính \widehat{AIE} .

Bài 15: Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao, AM là đường trung tuyến. Qua H kẻ đường thẳng song song với AB và AC, lần lượt cắt AC ở P và AB ở D. DP cắt AH ở O và AM ở Q.

- 1) Chứng minh $AH = DP$
- 2) Định dạng $\triangle MAC$ và $\triangle OAP$
- 3) Chứng minh $\triangle APQ$ vuông ở Q.

Bài 16: Cho điểm E thuộc cạnh AB của hình chữ nhật ABCD. F thuộc tia BC sao cho $\widehat{EDF} = 90^\circ$. Vẽ hình chữ nhật EDFK, tâm O. Chứng minh:

- 1) $BO = \frac{EF}{2}$
- 2) Tam giác DBK vuông

Bài 17: Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ BK vuông góc AC ở K. Gọi M và N là trung điểm AK và CD. Kẻ CI vuông góc BM ở I và cắt BK ở E

- 1) Chứng minh: $ME \parallel NC \parallel AB$ và E là trung điểm KB
- 2) Tứ giác MNCE là hình gì?
- 3) Chứng minh BM vuông góc MN.
- 4) Cho $BK = 4\text{cm}$; $AC = 10\text{cm}$. Tính S_{ABCD} .

Bài 18: Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ BP vuông góc AC ở P. Gọi M và N là trung điểm AP và CD. Kẻ CQ vuông góc BM ở Q và cắt BP ở E

- 1) Tứ giác MNCE là hình gì? Vì sao?
- 2) Chứng minh: BM vuông góc MN.

Bài 19: Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao. Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của H xuống AB và AC. Gọi I là trung điểm của HB, K là trung điểm HC. AH cắt PQ ở O.

- 1) Tứ giác APHQ là hình gì? Vì sao?
- 2) Chứng minh: $\widehat{KQH} = \widehat{KHQ}$ và $\widehat{KQO} = 90^\circ$
- 3) Tính \widehat{QPI}
- 4) Chứng minh $PI \parallel QK$

Bài 20: Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của H xuống AB và AC. Gọi I là trung điểm của HB, K là trung điểm HC. AH cắt MN ở O.

- 1) So sánh AH và MN
- 2) Tính \widehat{NMI}
- 3) Chứng minh: $MI \parallel NK$

Bài 21: Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H xuống AB và AC.

- 1) Chứng minh $AH = DE$
- 2) Gọi I là trung điểm của HB, K là trung điểm HC. Chứng minh $DI \parallel EK$.

III. BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm M di động trên BC; kẻ ME vuông góc AB tại E và MF vuông góc AC tại F. Định vị trí M trên BC để EF nhỏ nhất.

Bài 2: Cho hình chữ nhật ABCD tâm O, kẻ BH vuông góc AC. Trên tia đối của tia BH lấy BE = AC.

1) Tam giác BDE là tam giác gì? Vì sao?

2) Tính \widehat{EDC} ; \widehat{ADE}

Bài 3: Cho hình chữ nhật ABCD tâm I, kẻ BM vuông góc AC. Trên tia đối của tia BM lấy BF = AC. Tính \widehat{ADF} .

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao, AM là đường trung tuyến. Qua H kẻ đường thẳng song song với AB và AC, lần lượt cắt AC ở E và AB ở D. DE cắt AH ở O và AM ở I

1) Tứ giác ADHE là hình gì? Vì sao?

2) Tính \widehat{AIE} .

Bài 5: Cho điểm E thuộc cạnh AB của hình chữ nhật ABCD. F thuộc tia BC sao cho $\widehat{EDF} = 90^\circ$. Vẽ hình chữ nhật EDFK. Chứng minh tam giác DBK vuông.

Bài 6: Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ BK vuông góc AC ở K. Gọi M và N là trung điểm AK và CD. Kẻ CI vuông góc BM ở I và cắt BK ở E

1) Chứng minh BM vuông góc MN.

2) Cho BK = 4cm; AC = 10cm. Tính S_{ABCD} .

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H xuống AB và AC. Gọi I là trung điểm của HB, K là trung điểm HC. Chứng minh:

1) DI // EK

2) Gọi F là trung điểm IK. Chứng minh tam giác DEF cân.

BÀI 4. HÌNH THOI

I. BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1: Cho hình thoi ABCD có $\widehat{DAB} = 60^\circ$.

1) Tính số đo \widehat{ABC} , \widehat{BCD} , \widehat{CDA} . 2) Tính số đo \widehat{ABD} , \widehat{ACD} .

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh:

1) AE = ED = DF = FA. 2) Tứ giác AEDF là hình thoi.

Bài 3: Cho tam giác đều ABC có D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh các tứ giác AEDF, BFED, CDFE là các hình thoi.

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A. Trên nửa mặt phẳng không chứa A có bờ là đường thẳng chứa cạnh BC, vẽ tia Bx // AC và tia Cy // AB. Gọi D là giao điểm của hai tia Bx và Cy. Chứng minh:

1) Tứ giác ACDB là hình bình hành.

2) Tứ giác ACDB là hình thoi.

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A có đường trung tuyến AD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho DE = DA. Chứng minh:

1) Tứ giác ACDB là hình bình hành.

2) Tứ giác ACDB là hình thoi.

Bài 6: Cho tam giác ABC cân tại B có đường cao BE. Trên tia đối của tia EB lấy điểm D sao cho ED = EB. Chứng minh:

1) Tứ giác ABCD là hình bình hành.

2) Tứ giác ABCD là hình thoi.

Bài 7: Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD. Trên AC lấy điểm E sao cho DE // AB, trên AB lấy điểm F sao cho DF // AC. Chứng minh:

1) Tứ giác AEDF là hình bình hành.

2) Tứ giác AEDF là hình thoi.

Bài 8: Cho tam giác ABC cân tại B. Đường thẳng qua C song song với AB cắt tia phân giác của \widehat{ABC} tại D. Chứng minh:

1) AB = CD.

2) Tứ giác ABCD là hình thoi.

Bài 9: Cho tứ giác ABCD có $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$. Biết rằng: tia AC là tia phân giác của \widehat{BAD} và tia CA là tia phân giác của \widehat{BCD} . Chứng minh:

1) Các tam giác ABC và ADC là các tam giác cân.

2) AB = DA.

3) Tứ giác ABCD là hình thoi.

Bài 10: Cho tứ giác ABCD có AC = BD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh:

1) MN = NP = PQ = QM.

2) Tứ giác MNPQ là hình thoi.

Bài 11: Cho tứ giác ABCD có AD = BC. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, CD, BD. Chứng minh:

1) MN = NP = PQ = QM.

2) Tứ giác MNPQ là hình thoi.

Bài 12: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh: tứ giác MNPQ là hình thoi.

Bài 13: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, CD, BD. Chứng minh: tứ giác MNPQ là hình thoi.

Bài 14: Cho hình bình hành ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Đường thẳng d_1 qua O cắt cạnh AB và CD lần lượt tại M và P, đường thẳng d_2 qua O cắt cạnh BC và DA lần lượt tại N và Q. Biết rằng: $d_1 \perp d_2$. Chứng minh:

1) Tứ giác MNPQ là hình bình hành.

2) Tứ giác MNPQ là hình thoi.

Bài 15: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh: tứ giác MNPQ là hình thoi.

Bài 16: Cho hình thoi ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Trên đoạn OA lấy điểm E, trên đoạn OC lấy điểm F sao cho AE = CF. Chứng minh tứ giác BEDF là hình thoi.

- Bài 17:** Cho hình thoi ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn OA, OB, OC, OD. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.
- Bài 18:** Cho hình thoi ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết rằng: AC = 8cm, BD = 6cm. Tính độ dài các đoạn thẳng OA, OB, AB.
- Bài 19:** Cho hình thoi ABCD có AC = 12cm, BD = 16cm.
- 1) Tính diện tích hình thoi ABCD.
 - 2) Tính độ dài các cạnh của hình thoi ABCD.
- Bài 20:** Cho hình thoi ABCD có AB = 15cm, BD = 24cm.
- 1) Tính độ dài AC.
 - 2) Tính diện tích hình thoi ABCD.
- Bài 21:** Cho hình thoi ABCD có AB = BD = 10cm.
- 1) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?
 - 2) Tính số đo các góc của hình thoi ABCD.
 - 3) Tính độ dài AC.
 - 4) Tính diện tích hình thoi ABCD.
- Bài 22:** Cho hình thoi ABCD có diện tích bằng 120cm^2 và AC = 10cm.
- 1) Tính độ dài BD.
 - 2) Tính chu vi của hình thoi ABCD.
- Bài 23:** Cho hình thoi ABCD có diện tích bằng $50\sqrt{3}\text{cm}^2$ và AC = 10cm.
- 1) Tính độ dài BD và AB.
 - 2) Tính số đo các góc của hình thoi ABCD.
- Bài 24:** Cho tam giác ABC cân tại A có đường trung tuyến AD. Từ D, kẻ đường thẳng DE song song với AB ($E \in AC$) và kẻ DF song song với AC ($F \in AB$). Chứng minh: AEDF là hình thoi.
- Bài 25:** Cho hình bình hành ABCD có 2 đường cao AH = AK. Chứng minh ABCD là hình thoi.
- Bài 26:** Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh EFGH là hình thoi.
- Bài 27:** Cho tứ giác ABCD có AB = CD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD. Chứng minh:
- 1) $EH = GF$
 - 2) Tứ giác EFGH là hình thoi.
- Bài 28:** Cho tứ giác ABCD có AC = BD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh tứ giác EFGH là hình thoi.
- Bài 29:** Cho hình thang cân ABCD ($AD \parallel BC$). Gọi E, F, G, H, R, S lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD, AB, DC. Chứng minh:
- 1) Tứ giác RFSH là hình thoi.
 - 2) Tứ giác ERGS là hình thoi.
- Bài 30:** Cho góc xOy và tia phân giác Oz. Từ điểm $M \in Oz$ kẻ $MA \parallel Oy$ và $MB \parallel Ox$ (với $A \in Ox$ và $B \in Oy$). Chứng minh: tứ giác OAMB là hình thoi.
- Bài 31:** Cho hình bình hành ABCD có $AD \perp AC$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.
- 1) Chứng minh: $MN \perp AC$.
 - 2) Tứ giác AMCN là hình gì?

- Bài 32:** Cho hình bình hành ABCD có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm BC. Trên tia đối của tia MA lấy $ME = MA$. Chứng minh:
- 1) Tứ giác ABEC là hình thoi.
 - 2) D, C, E thẳng hàng.
 - 3) C là trung điểm DE.
- Bài 33:** Cho hình thoi ABCD có góc $A = 60^\circ$, kẻ $BH \perp AD$ ($H \in AD$), rồi kéo dài một đoạn $HE = BH$. Nối E với A, E với D. Chứng minh:
- 1) H là trung điểm AD.
 - 2) ABDE là hình thoi.
- Bài 34:** Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E là điểm đối xứng với A qua B; F là điểm đối xứng với C qua B. Chứng minh AFEC là hình thoi.
- Bài 35:** Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AD = CD$. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD, cắt cạnh AB tại E. Chứng minh AECD là hình thoi.
- Bài 36:** Cho tam giác ABC có D là điểm di động trên BC ($D \neq B, C$). Từ D, vẽ các đường thẳng song song với AB, AC và lần lượt cắt AC, AB tại M và N.
- 1) Chứng minh: AMDN là hình bình hành.
 - 2) Tìm vị trí của D để tứ giác AMDN là hình thoi.
- Bài 37:** Cho hình thang ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.
- 1) Chứng minh: MNPQ là hình bình hành.
 - 2) Hình thang ABCD có thêm tính chất gì thì MNPQ là hình thoi.
- Bài 38:** Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của BE, CD, DE, BC. Chứng minh:
- 1) $MK = IN = \frac{CE}{2}$
 - 2) $IK \perp MN$.
- Bài 39:** Cho hình thoi ABCD. Lấy 2 điểm E và F thuộc AC với $AE = CF$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.
- 1) Chứng minh: $OE = OF$
 - 2) Tứ giác BEDF là hình gì? Vì sao?
- Bài 40:** Cho hình thoi ABCD có AB = BD.
- 1) $\triangle ABD$ là tam giác gì? Vì sao?
 - 2) Tính các góc của hình thoi ABCD.
- Bài 41:** Cho hình thoi ABCD. Kẻ 2 đường cao AH và AK. Chứng minh: $AH = AK$.
- Bài 42:** Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ $Bx \parallel AC$, $Cy \parallel AB$; sao cho 2 tia Bx và Cy cắt nhau tại D.
- 1) Chứng minh: Tứ giác ABDC là hình thoi.
 - 2) Các đường trung tuyến BM và CN của $\triangle ABC$ cắt nhau ở G. AG cắt BC tại O. Chứng minh: AO là đường cao của $\triangle ABC$.
 - 3) Chứng minh: A, O, D thẳng hàng.
- Bài 43:** Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB. Biết $EF = 3\text{cm}$, $AB = 5\text{cm}$.
- 1) Tính độ dài BC
 - 2) Tính độ dài AD
 - 3) Tứ giác AEDF là hình gì? Vì sao?
- Bài 44:** Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh:

$$1) MQ = \frac{1}{2}BD; NP = \frac{1}{2}BD.$$

2) $MQ = MN$, rồi suy ra $MNPQ$ là hình thoi.

Bài 45: Cho hình thoi $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh:

1) $MN \perp MQ$. 2) Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Bài 46: Hình bình hành $ABCD$ có góc $\widehat{DAC} = 90^\circ$. Gọi M, N là trung điểm của AB, CD . Chứng minh:

1) $AM = CN$ 2) $AN = CM$ 3) Tứ giác $AMCN$ là hình thoi.

Bài 47: Cho tam giác đều ABC . Kéo dài trung tuyến BM của tam giác ABC về phía M lấy điểm D sao cho M là trung điểm của BD . Kéo dài trung tuyến CN của tam giác ABC về phía N , lấy điểm E sao cho N là trung điểm của CE . Chứng minh:

1) Các tứ giác $ABCD$ và $ACBE$ là hình thoi
2) Ba điểm D, A, E thẳng hàng
3) Tứ giác $BCDE$ là hình thang cân.

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = BD$.

1) $\triangle ABD$ là tam giác gì? Vì sao?
2) Tính các góc của hình thoi $ABCD$.

Bài 2: Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Kẻ 2 đường cao BE và BF ($E \in AD$; $F \in DC$).

1) Chứng minh: $BE = BF$ 2) Tính số đo \widehat{ABC} ?
3) Tính số đo \widehat{EBF} . $\triangle BEF$ là tam giác đặc biệt gì? Vì sao?

Bài 3: Cho hình thoi $ABCD$ có góc $A = 60^\circ$, kẻ $BH \perp AD$ ($H \in AD$), rồi kéo dài một đoạn $HE = BH$. Nối E với A, E với D . Chứng minh:

1) H là trung điểm AD . 2) Tứ giác $ABDE$ là hình thoi.
3) D là trung điểm CE . 4) $AC = BE$.

Bài 4: Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = BD$.

1) Chứng minh: $\triangle ABD$ đều
2) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh: $OA^2 = \frac{3}{4}AB^2$
3) Biết chu vi của hình thoi $ABCD$ là 8cm . Tính độ dài đường chéo $BD; AC$.
4) Tính diện tích hình thoi $ABCD$.

Bài 5: Cho hình thoi $ABCD$ có chu vi là 8 cm và $AC = 2\sqrt{3}\text{ cm}$.

1) Tính độ dài BD
2) Tính số đo các góc của hình thoi $ABCD$.

Bài 6: Cho hình thoi $ABCD$ có chu vi là 8 cm và $AB = BD$. Tính độ dài đường cao của hình thoi.

Bài 7: Cho hình thoi $ABCD$ có chu vi $= 24\text{cm}$. Đường cao $AH = 3\text{cm}$. Tính các góc của hình thoi.

Bài 8: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AD = CD$ và $AC \perp BC$. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD và cắt AB tại E .

1) Chứng minh: tứ giác $AECD$ là hình thoi.
2) Chứng minh: tứ giác $BEDC$ là hình bình hành.
3) Chứng minh: $\triangle CEB$ cân.
4) Giả sử $\triangle CEB$ đều. Chứng minh: tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

Bài 9: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AD = CD$ và $AC \perp BC$. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD và cắt AB tại E .

1) Chứng minh: $\triangle CEB$ cân.
2) Hình thang $ABCD$ sẽ như thế nào để $\triangle CEB$ đều?

Bài 10: Cho hình thoi $ABCD$ có góc A bằng 60° . Một góc $\angle xBy$ thay đổi sao cho tia Bx cắt cạnh AD tại M , tia By cắt cạnh CD tại N và góc $\angle xBy = 60^\circ$. Chứng minh:

1) $AB = BD$. 2) $\triangle ABM = \triangle DBN$.
3) Tổng độ dài $(DM + DN)$ không đổi.

Bài 11: Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = BD$. Gọi M và N lần lượt trên AB, BC sao cho $AM = BN$.

1) Chứng minh: $\widehat{ADM} = \widehat{BDN}$.
2) Chứng minh: $\triangle MDN$ là tam giác đều.

Bài 12: Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = BD$. Gọi M, N lần lượt trên các cạnh AB, BC sao cho $AM + NC = AD$.

1) Chứng minh: $AM = BN$. 2) Chứng minh: $\triangle AMD = \triangle BND$
3) Tính số đo các góc của $\triangle DMN$.

Bài 13: Cho hình thoi $ABCD$ có góc $A = 60^\circ$. Trên cạnh AD lấy điểm M , trên cạnh DC lấy điểm N sao cho $AM = IN$.

1) Chứng minh: $\widehat{BDC} = 60^\circ$ 2) Chứng minh: $\triangle ADM = \triangle ADN$
3) Chứng minh: $\widehat{MBN} = 60^\circ$ 4) $\triangle BMN$ là tam giác gì? Vì sao?

Bài 14: Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB . Biết $EF = 3\text{cm}$; $AB = 5\text{cm}$.

1) Tính độ dài BC 2) Tính độ dài AD
3) Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Vì sao? 4) Tính S_{AEDF}

Bài 15: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

1) Chứng minh: $MQ = \frac{1}{2}BD$; $NP = \frac{1}{2}BD$.

2) Chứng minh: $MQ = MN$, rồi suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.
3) Cho $MP = 3\text{cm}$; $NQ = 5\text{cm}$. Tính S_{ABCD} ?

Bài 16: Cho tứ giác $ABCD$ có $AC = BD$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

1) Chứng minh: $EH = GF = \frac{BD}{2}$.

2) So sánh: EF, GF, EH và GH.

3) Chứng minh: $EG \perp HF$.

Bài 17: Cho hình thoi ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1) Chứng minh: MN và PQ cùng bằng $\frac{AC}{2}$.

2) Chứng minh: $MN \perp MQ$.

3) Chứng minh: tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

4) Chứng minh: tứ giác MBPD là hình bình hành, suy ra M, O, P thẳng hàng (O là tâm hình thoi ABCD)

5) Biết $S_{ABCD} = 12\text{cm}^2$. Tính S_{MNPQ}

Bài 18: Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1) Chứng minh: $EF = GH$; $EH = GF$.

2) Chứng minh: tứ giác EFGH là hình thoi.

3) Gọi M, N lần lượt là trung điểm BD, AC. Chứng minh: $EN = MG = \frac{BC}{2}$

4) Tứ giác ENGM là hình gì? Vì sao?

Bài 19: Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BD, CD, CA.

1) Chứng minh: $EH = GF = \frac{BC}{2}$

2) Chứng minh: $EH = GF = \frac{AD}{2}$

3) Chứng minh: EG là tia phân giác của góc FEH.

4) Chứng minh: $\widehat{FGD} = \widehat{HGC}$.

5) Cho $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 50^\circ$. Tính các góc của tứ giác EFGH?

Bài 20: Cho tứ giác ABCD có $AB = CD$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD. Chứng minh:

1) $EH = GF$

2) Tứ giác EFGH là hình thoi.

Bài 21: Cho hình thang cân ABCD ($AD \parallel BC$). Gọi E, F, G, H, R, S lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD, AB, DC. Chứng minh:

1) Tứ giác EFGH là hình thoi. 2) Tứ giác ERGS là hình thoi.

Bài 22: Cho hình chữ nhật ABCD có M, N là trung điểm của AB và CD.

1) Chứng minh: các tứ giác AMND và MBCN là hình chữ nhật.

2) Gọi P là giao điểm của AN và DM; Q là giao điểm của BN và CM. Chứng minh: $PQ \parallel AB$

3) Tứ giác MPNQ là hình gì?

Bài 23: Cho góc xOy và tia phân giác Oz. Từ điểm $M \in Oz$ kẻ $MA \parallel Oy$ và $MB \parallel Ox$ (với $A \in Ox$ và $B \in Oy$).

1) Chứng minh: tứ giác OAMB là hình thoi.

2) Từ điểm M kẻ đường thẳng vuông góc với Oz, cắt Ox tại C và cắt Oy tại D. Chứng minh: $AB \parallel CD$.

3) Chứng minh: $AB = \frac{CD}{2}$.

Bài 24: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của BE, CD, DE, BC.

1) Chứng minh: $MK = IN = \frac{CE}{2}$

2) Chứng minh: $IK \perp MN$.

3) Biết $IK = 10\text{cm}$; $MN = 2\text{cm}$. Tính diện tích tứ giác MINK.

Bài 25: Cho hình thang ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1) Chứng minh: MNPQ là hình bình hành.

2) Hình thang ABCD có thêm tính chất gì thì MNPQ là hình thoi?

Bài 26: Hình bình hành ABCD có góc $\widehat{DAC} = 90^\circ$. Gọi M, N là trung điểm của AB, CD. Chứng minh:

1) $AM = CN$

2) $AN = CM$

3) Tứ giác AMCN là hình thoi

4) Biết $MN = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Tính độ dài đoạn AN

Bài 27: Cho hình thoi ABCD có AH là đường cao. M là trung điểm AD. Biết $AD = 4\text{cm}$; $AH = 2\text{cm}$.

1) Chứng minh: $HM = AM$.

2) Chứng minh: $\triangle AHM$ đều.

3) Tính số đo góc D

4) Tính các góc hình thoi ABCD

Bài 28: Cho hình thoi ABCD (góc A tù). Từ A hạ các đường vuông góc AI, AK xuống các cạnh BC, CD. Giả sử $IK = \frac{AC}{2}$; O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh:

1) $\triangle IOK$ đều

2) $\widehat{IOC} = 2\widehat{IAC}$

3) $\widehat{IOK} = 2\widehat{IAK}$

4) $\widehat{BCD} = 150^\circ$

Bài 29: Cho hình thoi ABCD. Kẻ 2 đường cao AH và AK. Chứng minh: $AH = AK$.

Bài 30: Cho hình thoi ABCD có O là giao điểm của 2 đường chéo. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ O đến AB, BC, CD, DA.

1) Chứng minh: E, O, G thẳng hàng và H, O, F thẳng hàng.

2) Chứng minh: $OE = OF = OH = OG$.

3) Tứ giác EFGH là hình gì? Vì sao?

Bài 31: Cho hình thoi ABCD (góc A tù). Từ A hạ các đường vuông góc AI, AK xuống các cạnh BC, CD. Giả sử $IK = \frac{BD}{2}$; O là giao điểm của AC và BD.

- 1) Chứng minh: $\triangle ACI = \triangle ACK$
- 2) Chứng minh: tứ giác BOKI là hình bình hành.
- 3) Chứng minh: K là trung điểm CD.
- 4) Tính các góc của hình thoi ABCD.

Bài 32: Cho hình thoi ABCD (góc B tù). Từ B hạ BM, BN lần lượt vuông góc với AD và CD. Từ D hạ DP và DQ lần lượt vuông góc với AB và BC. Gọi H là giao điểm của MB và DP; K là giao điểm của BN và DQ, O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh:

- 1) H là trực tâm $\triangle ABD$
- 2) A, H, K, C thẳng hàng
- 3) $\widehat{PDQ} = \widehat{MBN}$
- 4) $\widehat{PHM} = \widehat{QKN}$
- 5) Tứ giác BHDK là hình thoi.

Bài 33: Cho hình bình hành ABCD, các đường chéo cắt nhau ở O. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là giao điểm của các đường phân giác của các $\triangle AOB$; $\triangle BOC$; $\triangle COD$; $\triangle DOA$. Chứng minh:

- 1) H, O, F thẳng hàng và E, O, G thẳng hàng.
- 2) $\triangle BOF = \triangle DOH$
- 3) $OE = OG$
- 4) Tứ giác EFGH là hình thoi.

Bài 34: Cho hình thoi ABCD (góc A nhọn) có $AB = a$; kẻ $DH \perp AB$ ($H \in AB$),

- 1) Chứng minh: $S_{ABCD} \leq AB \cdot AD$
- 2) Chứng minh: $S_{ABCD} \leq a^2$
- 3) Khi S_{ABCD} có giá trị lớn nhất thì tứ giác ABCD là hình gì? Vì sao?

BÀI 5. HÌNH VUÔNG

I. BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1: Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$ và tia phân giác Ot. Lấy điểm A bất kì trên Ot, kẻ $AB \perp Ox$ ở A, $AC \perp Oy$ ở C. Chứng minh tứ giác OBAC là hình vuông.

Bài 2: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$; $AB = AC = a$ và AD là đường phân giác của góc trong. Từ D kẻ $DE \parallel AC$ và $DF \parallel AB$ (với $E \in AB$; $F \in AC$). Chứng minh:

- 1) Tứ giác AEDF là hình vuông.
- 2) $CE = BF$.

Bài 3: Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = \sqrt{2}$ và $BC = 2$. D là điểm đối xứng với A qua BC.

- 1) $\triangle ABC$ là tam giác gì? Vì sao?
- 2) Chứng minh tứ giác ABDC là hình vuông.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông cân ở A có đường trung tuyến AM. Kẻ $MH \parallel AC$, $MK \parallel AB$ ($H \in AB$; $K \in AC$). Tứ giác AHMK là hình đặc biệt gì? Vì sao?

Bài 5: Cho hình vuông ABCD. Kéo dài BC lấy E, kéo dài CD lấy F, sao cho $BE = DF$.

- 1) Chứng minh: $\triangle ABE = \triangle ADF$.
- 2) $\triangle EAF$ là tam giác gì? Vì sao?
- 3) Kẻ tia $Ex \parallel AF$ và tia $Fy \parallel AE$. Ex cắt Fy tại G. Tứ giác AEGF là hình gì? Vì sao?

Bài 6: Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm A', B', C', D' sao cho $AA' = BB' = CC' = DD'$. Chứng minh rằng:

- 1) $A'B = B'C = C'D = D'A$.
- 2) $\triangle D'AA' = \triangle A'BB' = \triangle B'CC' = \triangle C'DD'$.
- 3) Tứ giác A'B'C'D' là hình vuông.

Bài 7: Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của các tia AD, BA, CB, DC lần lượt lấy các điểm A', B', C', D' sao cho $AA' = BB' = CC' = DD'$. Chứng minh:

- 1) $\triangle AA'B' = \triangle BB'C' = \triangle CC'D' = \triangle DD'A'$.
- 2) $\widehat{A'B'C'} = 90^\circ$.
- 3) Tứ giác A'B'C'D' là hình vuông.

Bài 8: Cho hình vuông ABCD. Hai đường thẳng d_1 và d_2 vuông góc nhau ở tâm O của hình vuông. Đường thẳng d_1 cắt AB, CD ở P và Q. Đường thẳng d_2 cắt BC, AD ở R và S. Chứng minh:

- 1) $\triangle AOP = \triangle BOR$.
- 2) $OP = OR = OS = OQ$.
- 3) Tứ giác PRQS là hình vuông.

Bài 9: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD, AB, BC, CD.

- 1) Chứng minh: tứ giác MNPQ là hình bình hành.
- 2) Hình bình hành MNPQ là hình gì nếu hai đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc nhau?

Bài 10: Cho tam giác OBC vuông cân tại O. Lấy A thuộc tia đối của tia OC, D thuộc tia đối của tia OB sao cho $OA = OD$.

- 1) Chứng minh: ABCD là hình thang cân.
- 2) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, AB, BC, CD. Chứng minh: MNPQ là hình vuông.

Bài 11: Cho tứ giác EFGH có hai đường chéo EG và FH vuông góc nhau và bằng nhau. Gọi S, R, Q, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh EF, FG, GH, HE. Chứng minh: SRQP là hình vuông.

Bài 12: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

- 1) Chứng minh: MNPQ là hình bình hành.

- a) Hình chữ nhật b) Hình thoi c) Hình vuông

Bài 13: Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, AC, DC, DB.

- 1) Chứng minh: EFGH là hình bình hành.
- 2) Nếu $AD \perp BC$ thì hình bình hành EFGH trở thành hình gì? Vì sao?
- 3) Nếu $AD = BC$ thì hình bình hành EFGH trở thành hình gì? Vì sao?
- 4) Tìm điều kiện để hình bình hành EFGH trở thành hình vuông.

Bài 14: Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G. Gọi H là trung điểm của GB, K là trung điểm của GC.

- 1) Chứng minh: Tứ giác DEHK là hình bình hành.
- 2) Nếu tam giác ABC cân tại A. Chứng minh: $BD = CE$ và DEHK là hình chữ nhật.
- 3) Nếu các đường trung tuyến BD và CE vuông góc nhau thì tứ giác DEHK là hình gì? Vì sao?
- 4) Nêu điều kiện của tam giác ABC để tứ giác DEHK là một hình vuông.

Bài 15: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2BC$. Gọi I là trung điểm của AB và K là trung điểm của DC. Chứng minh:

- 1) AIKD và BIKC là hình vuông.
- 2) $IK = \frac{DC}{2}$ và $\widehat{DIC} = 90^\circ$.

Bài 16: Cho tam giác ABC vuông cân ở A. Trên cạnh BC lấy các điểm H, G sao cho $BH = HG = GC$. Qua H và G kẻ các đường thẳng vuông góc với BC chúng cắt AB và AC theo thứ tự tại E, F. Chứng minh rằng:

- 1) $\triangle BEH$ và $\triangle CFG$ là các tam giác vuông cân.
- 2) $EH = HG = GF$.

Bài 17: Cho tam giác ABC vuông cân ở A. Trên cạnh BC lấy các điểm H, G sao cho $BH = HG = GC$. Qua H và G kẻ $HE \perp BC$ và $GF \perp BC$ ($E \in AB$; $F \in AC$). Chứng minh rằng:

- 1) $EH = HG = GC$.
- 2) Tứ giác EFGH là hình vuông.

Bài 18: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2BC$. Gọi I là trung điểm của AB và K là trung điểm của DC.

- 1) Chứng minh: AIKD và BIKC là hình vuông.
- 2) Chứng minh: $\triangle DIC$ vuông cân.
- 3) Gọi S và R lần lượt là tâm của các hình vuông AIKD và BIKC. Chứng minh: ISKR là một hình vuông.

Bài 19: Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$ có Ot là đường phân giác. D là điểm trên Ot với $OD = a$. Đường trung trực của OD cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A, B.

2) Tứ giác OBDA là hình gì? Vì sao?

3) Tính S_{OADB} theo a.

Bài 20: Cho tam giác ABC có $AB = BC = 1$ và $AC = \sqrt{2}$.

- 1) Tính các góc của $\triangle ABC$.
- 2) Gọi D là điểm đối xứng với C qua B. Chứng minh $\triangle ADB$ vuông cân.
- 3) Gọi BE và BF lần lượt là đường phân giác góc trong của các $\triangle ADB$ và $\triangle ABC$. Chứng minh BA là phân giác của \widehat{EBF} .
- 4) Chứng minh: AEBF là hình vuông.

II. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = \sqrt{2}$ và $BC = 2$. D là điểm đối xứng với A qua BC.

- 1) Tính BD, DC.
- 2) Tứ giác ABDC là hình gì? Vì sao? Tính S_{ABDC} .

Bài 2: Cho tam giác ABC có $AB = BC = 1$ và $AC = \sqrt{2}$.

- 1) Tính các góc của tam giác ABC.
- 2) Gọi D là điểm đối xứng với C qua B. Chứng minh $\triangle ADB$ vuông cân.
- 3) Gọi BE và BF lần lượt là đường phân giác góc trong của các $\triangle ADB$ và $\triangle ABC$. Chứng minh BA là phân giác của \widehat{EBF} .
- 4) Chứng minh: AEBF là hình vuông.
- 5) So sánh $\triangle ACE$ với $\triangle ADF$.

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD. Gọi DE, BK lần lượt là đường phân giác góc trong của các $\triangle ADB$ và $\triangle DBC$.

- 1) Chứng minh: $DE \parallel BK$.
- 2) Tứ giác DEBK là hình gì? Vì sao?
- 3) Tìm điều kiện của $\triangle ABD$ để DEBK trở thành:
 - a) Hình chữ nhật.
 - b) Hình vuông.

Bài 4: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD, AB, BC, CD.

- 1) Chứng minh: MNPQ là hình bình hành.
- 2) Hình bình hành MNPQ là hình gì nếu hai đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc?

Bài 5: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

- 1) Chứng minh: MNPQ là hình bình hành.
- 2) Các đường chéo của tứ giác ABCD phải có điều kiện gì thì MNPQ là:
 - a) Hình chữ nhật
 - b) Hình thoi
 - c) Hình vuông

Bài 6: Cho tứ giác EFGH có hai đường chéo EG và FH vuông góc nhau và bằng nhau. Gọi S, R, Q, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh EF, FG, GH, HE. Chứng minh: SRQP là hình vuông.

Bài 7: Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, AC, DC, DB.

- 1) Chứng minh: EFGH là hình bình hành.
- 2) Nếu $AD \perp BC$ thì hình bình hành EFGH trở thành hình gì? Vì sao?
- 3) Nếu $AD = BC$ thì hình bình hành EFGH trở thành hình gì? Vì sao?
- 4) Tìm điều kiện để hình bình hành EFGH trở thành hình vuông.

Bài 8: Cho hình bình hành ABCD có $AB = 2AD$. Gọi M và N là trung điểm của AB và CD.

- 1) Xác định dạng tứ giác AMND.
- 2) Chứng minh: $AN \parallel MC$.
- 3) E là giao điểm của AN và DM, F là giao điểm của MC và BN. Chứng minh: $EF \parallel BC$.
- 4) Xác định dạng của tứ giác MENF.
- 5) Tìm điều kiện của hình bình hành ABCD để tứ giác MENF là hình vuông.

Bài 9: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2BC$. Gọi I là trung điểm của AB và K là trung điểm của DC. Chứng minh:

- 1) AIKD và BIKC là hình vuông.
- 2) $IK = \frac{DC}{2}$ và $\widehat{DIC} = 90^\circ$.

Bài 10: Cho hình vuông ABCD. Vẽ $\widehat{xAy} = 90^\circ$. Ax cắt BC ở M; Ay cắt đường thẳng CD tại N.

- 1) Chứng minh: $\triangle AMN$ vuông cân.
- 2) Vẽ hình bình hành AMFN có O là giao điểm của AF và MN. Chứng minh: $OA = OC = \frac{AF}{2}$ và $\triangle ACF$ vuông tại C.

- 3) Chứng minh: D, O, B thẳng hàng.

Bài 11: Cho hình vuông ABCD. Từ điểm M thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng cắt CD ở K sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{AMK}$. Kẻ $AH \perp MK$ ở H. Chứng minh:

- 1) $\triangle ABM = \triangle AHM$ và $AH = AD$.
- 2) $\triangle DAK = \triangle HAK$.
- 3) $\widehat{MAK} = \frac{1}{2} \widehat{A} = 45^\circ$.

Bài 12: Cho hình vuông ABCD. Từ điểm M thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng cắt CD ở K sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{AMK}$. Kẻ $AM \perp MK$ ở H. Chứng minh:

- 1) $\triangle AMH = \triangle AMB$.
- 2) $\widehat{KAM} = 45^\circ$.

Bài 13: Cho hình vuông ABCD. M là điểm tùy ý trên cạnh DC. Tia phân giác của \widehat{DAM} cắt CD tại I. Kẻ $IH \perp AM$ tại H và tia IH cắt BC tại K. Chứng minh:

- 1) $\triangle ADI = \triangle AHI$ và $\triangle ABK = \triangle AHK$.
- 2) $\widehat{IAK} = 45^\circ$.

Bài 14: Cho hình vuông ABCD. Lấy $N \in AB$; $M \in BC$ sao cho $\widehat{ADN} = \widehat{NDM}$. Kẻ tia $Dx \perp DN$; Dx cắt tia BC tại K. Chứng minh:

$$1) \widehat{ADN} = \widehat{CDK}.$$

$$2) AN = CK.$$

$$3) \triangle MDK \text{ cân ở M.}$$

$$4) DM = AN + CM.$$

Bài 15: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AD lấy điểm F, trên cạnh DC lấy điểm E sao cho $AF = DE$. Chứng minh:

$$1) \triangle ABF = \triangle ADE.$$

$$2) \widehat{FAE} \text{ và } \widehat{AFB} \text{ phụ nhau.}$$

$$3) AE \perp BF.$$

Bài 16: Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD.

$$1) \text{ Chứng minh: } AECK \text{ là hình bình hành.}$$

$$2) \text{ Chứng minh: } DF \perp CE \text{ ở M.}$$

$$3) AK \text{ cắt } DF \text{ tại N. Chứng minh N là trung điểm của DM.}$$

$$4) \text{ Chứng minh: } AM = AB.$$

Bài 17: Cho tam giác ABC. Ngoài tam giác ABC vẽ hai hình vuông ABDE và BCKL. BM là đường trung tuyến của tam giác ABC.

$$1) \text{ Chứng minh: Hai góc } \widehat{DBL} \text{ và } \widehat{ABC} \text{ bù nhau.}$$

$$2) \text{ Vẽ hình bình hành DBLN. Chứng minh } \triangle ABC = \triangle NLB.$$

$$3) \text{ Gọi O là trung điểm của DL. Chứng minh } \widehat{NLO} = \widehat{ABM} \text{ và } DL = 2BM.$$

$$4) \text{ Tia MB cắt DL tại I. Tính } \widehat{ABM} + \widehat{DBI}. \text{ Suy ra } \widehat{DIB} = 90^\circ.$$

Bài 18: Cho tam giác ABC vuông ở A. Dựng các hình vuông ABDE và BCFG sao cho D, C cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ là AB và G, A cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ là BC. GA cắt BC và DC tại I và K. Chứng minh:

$$1) \widehat{GBA} = \widehat{CBD}.$$

$$2) GA = CD \text{ và } \widehat{BCD} = \widehat{AGB}.$$

$$3) GA \perp DC \text{ tại K.}$$

Bài 19: Cho hình vuông ABCD. Vẽ $\widehat{xAy} = 90^\circ$. Ax cắt BC ở M; Ay cắt đường thẳng CD tại N.

$$1) \text{ Chứng minh: } \triangle AMN \text{ vuông cân.}$$

$$2) \text{ Vẽ hình bình hành MANF có O là giao điểm của AF và MN. Chứng minh: D, O, B thẳng hàng.}$$

$$3) \text{ Chứng minh: } AC \perp CF.$$

Bài 20: Cho hình vuông ABCD. Trong hình vuông vẽ tam giác đều CED. Ngoài hình vuông vẽ tam giác đều BCF.

$$1) \text{ Tính các góc của } \triangle AED.$$

$$2) \text{ Chứng minh: } \triangle ECF \text{ vuông cân.}$$

$$3) \text{ Chứng minh: A, E, F thẳng hàng.}$$

Bài 21: Cho hình vuông ABCD. Trong hình vuông lấy hai điểm E, F sao cho $\widehat{EDC} = \widehat{ECD} = 15^\circ$ và $\widehat{FAD} = \widehat{FDA} = 15^\circ$. Chứng minh:

$$1) \triangle ADF = \triangle DCE.$$

$$2) \triangle EDF \text{ là tam giác đều.}$$

$$3) \text{ Tính } \widehat{AFE}.$$

$$4) \triangle DFA = \triangle EFA.$$

$$5) \triangle DEA = \triangle CEB.$$

$$6) \triangle AEB \text{ là tam giác đều.}$$

Bài 22: Cho hình vuông ABCD. Ở bên trong hình vuông lấy hai điểm E, F sao cho $\widehat{EDC} = \widehat{ECD} = 15^\circ$ và $\widehat{FAD} = \widehat{FDA} = 15^\circ$. Chứng minh:

- 1) $\triangle EDF$ là tam giác đều.
- 2) $\triangle DFA = \triangle EFA$.
- 3) $\triangle AEB$ là tam giác đều.

Bài 23: Cho hình vuông ABCD. Vẽ điểm E trong hình vuông sao cho $\widehat{EDC} = \widehat{ECD} = 15^\circ$. Vẽ điểm F trong hình vuông sao cho $\widehat{FAD} = \widehat{FDA} = 15^\circ$. Chứng minh:

- 1) $\triangle EDF$ là tam giác đều.
- 2) $\triangle ABE$ là tam giác đều.

Bài 24: Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ một điểm M trên cạnh BC. Kẻ $MH \perp AB$ tại H. Kẻ $MK \perp AC$ tại K.

- 1) Chứng minh: Tứ giác AHMK là hình chữ nhật.
- 2) Tìm vị trí của M trên cạnh BC để AHMK là hình vuông.
- 3) Kẻ $AI \perp BC$ tại I. So sánh AM với AI rồi suy ra vị trí của M để $AM + HK$ nhỏ nhất.

Bài 25: Cho hình bình hành MNPQ có $QM = QN$ và $\widehat{MQN} = 90^\circ$. Gọi NE, QF lần lượt là đường phân giác góc trong của các $\triangle PNQ$ và $\triangle MQN$. Chứng minh:

- 1) $\triangle MQN$ và $\triangle QNF$ là các tam giác vuông cân.
- 2) NEQF là hình vuông.

Bài 26: Cho hình bình hành MNPQ có $QM = QN$. Gọi NE, QF lần lượt là đường phân giác góc trong của các $\triangle PNQ$ và $\triangle MQN$.

- 1) Chứng minh NEQF là hình chữ nhật.
- 2) Nếu $\widehat{QMN} = 45^\circ$ thì NEQF là hình gì? Vì sao?

Bài 27: Cho hình bình hành ABCD. Gọi DE, BK lần lượt là đường phân giác của các $\triangle ADB$ và $\triangle DBC$.

- 1) Chứng minh: $DE \parallel BK$.
- 2) Cho $DE \perp AB$. Chứng minh: $DA = DB$.
- 3) Trong trường hợp $DE \perp AB$. Tìm số đo \widehat{ADB} để tứ giác DEBK là hình vuông.

Bài 28: Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của các tia AD, DC, CB, BA lần lượt lấy các điểm A', D', C', B' sao cho $AA' = BB' = CC' = DD'$. Chứng minh: $A'B'C'D'$ là hình vuông.

Bài 29: Cho hình vuông ABCD có tâm O. Đường thẳng d_1 cố định qua tâm O lần lượt cắt các tia DA, BC ở M và P (A nằm giữa D và M).

- 1) Chứng minh: $OM = OP$.
- 2) Vẽ đường thẳng d_2 tùy ý qua O cắt các tia AB và CD tại N và Q. Chứng minh: MNPQ là hình bình hành.
- 4) Nếu MNPQ là hình vuông thì có nhận xét gì về d_2 ?

Bài 30: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = 2a$.

- 1) Tính độ dài đường cao AD.
- 2) Gọi M là trung điểm của AC. Trên tia DM lấy E sao cho $DM = ME$. Chứng minh ADCE là hình vuông. Tính S_{ADCE} theo a.

Bài 31: Cho tam giác ABC cân tại A có đường trung tuyến AD. Gọi M là trung điểm của cạnh AC. Vẽ điểm E đối xứng với D qua M.

- 1) Chứng minh: ADCE là hình chữ nhật.
- 2) Nếu ADCE là hình vuông có diện tích bằng a^2 thì $\triangle ABC$ là hình gì? Vì sao? Tính diện tích của $\triangle ABC$ theo a.

Bài 32: Cho hình chữ nhật ABCD. Tia phân giác góc C cắt tia phân giác góc D tại F. Tia phân giác góc A cắt tia phân giác góc B tại E.

- 1) Tính các góc của $\triangle DFC$.
- 2) Chứng minh: $\triangle AEB = \triangle CFD$.
- 3) BE cắt CF tại H. Chứng minh $\widehat{CBH} = \widehat{BCH}$.

Bài 33: Cho hình chữ nhật ABCD ($AB > AD$). Hai tia phân giác góc A và góc D cắt nhau tại G. Hai tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại H. Hai tia DG và CH cắt nhau tại F. Hai tia AG và BH cắt nhau tại E. Chứng minh:

- 1) Các $\triangle DFC$, $\triangle AGD$ và $\triangle BHC$ vuông cân.
- 2) $AE = CF$; $BH = CH$; $EH = FH$.

III. BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1: Cho tam giác ABC nhọn, ngoài tam giác ABC vẽ các tam giác đều ABD và ACE. Dựng hình bình hành ADFE. Chứng minh tam giác FBC là tam giác đều.

Bài 2: Cho tam giác ABC nhọn, góc A = 30° . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, dựng tam giác đều BCD, và dựng tam giác đều BAE về phía mặt phẳng không chứa điểm C.

- 1) Chứng minh: $\triangle ABD = \triangle EBC$
- 2) Chứng minh: $AD^2 = AB^2 + AC^2$

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD có góc A = 42° . Ngoài hình bình hành vẽ các tam giác đều ABE và BCF.

- 1) Tính góc EBF
- 2) Chứng minh: tam giác DEF đều

Bài 4: Cho điểm D nằm trong tam giác đều ABC. Vẽ các tam giác đều BDE và CDF (E, F, D nằm cùng phía đối với BC). Chứng minh: tứ giác AEDF là hình bình hành.

Bài 5: Cho hình vuông ABCD. Điểm E thuộc miền trong hình vuông sao cho $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} = 15^\circ$. Dựng tam giác đều FEB sao cho F và C ở cùng phía đối với EB. Chứng minh:

- 1) $\triangle ABE = \triangle CBF$
- 2) $\triangle CBF$ cân
- 3) $\widehat{CEF} = 15^\circ$
- 4) $\triangle CDE$ đều

Bài 6: Cho tam giác ABC có các góc nhọn. Dựng các tam giác đều $AB'C'$ và $AC'B'$ ra phía ngoài tam giác. Gọi K và L theo thứ tự là trung điểm của $C'A$ và CB' , M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 3MC$. Gọi N và I là trung điểm của BC và AC

- 1) Chứng minh: góc $KAL =$ góc NIB'
- 2) Chứng minh: $\triangle AKL = \triangle INB'$
- 3) Chứng minh: góc $MLK = 60^\circ$
- 4) Tính các góc của tam giác MLK

Bài 7: Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều AB_1C và ABC_1 . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC_1 , BA_1 . Gọi I và H lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh:

- 1) $\widehat{MIN} = \widehat{MHP}$
- 2) $MN = MP$
- 3) $\triangle MNP$ đều

Bài 8: Cho tam giác ABC có $AB = 3\text{cm}$, $AC = 2\text{cm}$ và góc $BAC = a^\circ$. Dựng ra phía ngoài các tam giác đều BCA_1 và ACB_1

- 1) Chứng minh: $\triangle ACA_1 = \triangle B_1CB$
- 2) Chứng minh: $BB_1 \leq 5\text{cm}$
- 3) Tìm góc a° để AA_1 đạt giá trị lớn nhất

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng các hình vuông ABDE và BCFG sao cho D và C ở cùng phía đối với AB, G và A ở cùng phía đối với BC. Chứng minh:

- 1) $GA = DC$
- 2) $GA \perp DC$

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH. Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa điểm C, vẽ hình vuông AHKE. AC cắt KE ở P

- 1) Chứng minh: tam giác ABP vuông cân
- 2) Dựng hình bình hành APQB. Gọi F là giao điểm của PB và AQ. Chứng minh: HFKQ là hình thang

Bài 11: Cho tam giác ABC nhọn có I là trung điểm của AC. Bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông BCKL và BAED. Trên tia đối của tia IB lấy M sao cho I là trung điểm của BM. Chứng minh:

- 1) $\widehat{BAM} = \widehat{DBC}$
- 2) $DL = 2BI$

Bài 12: Cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Ngoài tam giác dựng các hình vuông BCKL và BADE. Gọi BM là đường trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh:

- 1) $EL = 2BM$
- 2) $EL \perp BM$

Bài 13: Cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Ở miền ngoài của tam giác dựng các hình vuông ABEF và ACGH. Kẻ đường cao AI của tam giác ABC. Từ F và H dựng $FK \perp AI$, $HL \perp AI$. Gọi J là giao điểm của AI và FH. Chứng minh:

- 1) FKHL là hình bình hành
- 2) AI đi qua trung điểm của FH

Bài 14: Ở miền ngoài tam giác ABC, dựng các hình vuông ABEF và ACGH. Dựng đường cao AI của tam giác ABC. Chứng minh AI, BG, CE đồng quy.

Bài 15: Cho tam giác ABC nhọn. Ngoài tam giác dựng các hình vuông ABDE, ACGH, BCMN có tâm lần lượt là O_1, O_2, O_3 . Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh:

- 1) $O_1I = O_2I$ và $O_1I \perp O_2I$
- 2) $O_2O_3 = O_1C$ và $O_2O_3 \perp O_1C$
- 3) O_3A, O_2B và O_1C đồng quy

Bài 16: Trên các cạnh của một tứ giác bất kỳ, về phía ngoài của nó dựng các hình vuông ABEF, BCGH, CDNK, ADPQ. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm các hình vuông kể trên. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh:

- 1) $O_1M = O_2M$ và $O_1M \perp O_2M$
- 2) $O_3M = O_4M$ và $O_3M \perp O_4M$
- 3) $\triangle O_1MO_3 = \triangle O_2MO_4$
- 4) $O_1O_3 \perp O_2O_4$

Bài 17: Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AH. Ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông ABDE và ACFG. M và N là hình chiếu của D và F xuống BC

- 1) So sánh BC và $DM + FN$
- 2) Chứng minh: AH qua trung điểm của EG
- 3) Chứng minh: AH, CE và BG đồng quy

Bài 18: Cho tam giác ABC nhọn. Ngoài tam giác dựng các hình vuông ABDE và ACFG, dựng hình bình hành AEIG. Chứng minh:

- 1) $\triangle ABC = \triangle GIA$
- 2) $CI = BF$
- 3) $CI \perp BF$
- 4) AI, BF, CD đồng quy

Bài 19: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AI. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE và ACFG

- 1) Chứng minh: DE, IA, FG đồng quy
- 2) Chứng minh: BF, CD, AI đồng quy
- 3) Gọi H, K, L lần lượt là trung điểm của EB, BC, CG. Chứng minh: $HK \perp KL$ và $HK = KL$

Bài 20: Cho tam giác ABC nhọn. Về phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE tâm M và ACFG tâm N. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của EG và BC

- 1) Chứng minh: KMIN là hình vuông
- 2) Nếu tam giác ABC có BC cố định và độ dài đường cao $AH = h$ không đổi, khi A di động thì I sẽ di động trên đường cố định nào?

Bài 21: Cho tam giác ABC. Lấy AB, BC, AC làm cạnh dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE và ACGH, BCPQ. Gọi tâm các hình vuông đó theo thứ tự là I, J, K. Chứng minh: AK, BJ và CI đồng quy.

Bài 22: Cho tam giác ABC. Ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông BCDE, ACFG, ABKH và các hình bình hành BEQK, CDPF. Chứng minh:

- 1) $\triangle ABC = \triangle BKQ$
- 2) $\triangle ABC = \triangle CFP$
- 3) $\triangle ABQ = \triangle PCA$
- 4) $\triangle AQP$ vuông cân

Bài 23: Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân APB (góc P = 90°), tam giác vuông cân CAN (góc N = 90°). Gọi M là trung điểm của BC. Từ A kẻ hai đường thẳng vuông góc với AB và AC, hai đường thẳng đó lần lượt cắt các đường thẳng PB và CN kéo dài tại E và D. Gọi I là giao điểm của EC và BD. Chứng minh:

- 1) $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ vuông cân
- 2) P, N lần lượt là trung điểm của EB và CD
- 3) $EC \perp BD$ tại K
- 4) $\triangle MNP$ vuông cân tại M

Bài 24: Cho tam giác ABC nhọn có cạnh BC cố định nằm trên đường thẳng xy vẽ hai tam giác vuông cân ABD và ACE ở B và C cùng nằm trên cùng nửa mặt phẳng chứa điểm A có bờ là đường thẳng xy. Kẻ $DM \perp xy$ ở M và $EN \perp xy$ ở N. Kẻ $AH \perp BC$ tại H

- 1) Chứng minh: $BH = DM$ và $BC = DM + EN$
- 2) Gọi I và K lần lượt là trung điểm của DE và MN. Chứng minh: tam giác IBC vuông cân tại I

Bài 25: Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân ABD và ACE ở B và C. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh tam giác CBM vuông cân.

Bài 26: Cho tam giác ABC nhọn, góc A = 30°. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, dựng tam giác đều BCD. Chứng minh: $AD^2 = AB^2 + AC^2$

Bài 27: Cho hình bình hành ABCD có góc A = 42°. Ngoài hình bình hành vẽ các tam giác đều ABE và BCF. Chứng minh: tam giác DEF đều.

Bài 28: Cho hình vuông ABCD. Điểm E thuộc miền trong hình vuông sao cho $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} = 15^\circ$. Chứng minh: tam giác CDE đều.

Bài 29: Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng các hình vuông ABDE và BCFG sao cho D và C ở cùng phía đối với AB, G và A ở cùng phía đối với BC. Chứng minh: $GA \perp DC$

Bài 30: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH. Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa điểm C, vẽ hình vuông AHKE. AC cắt KE ở P. Dựng hình bình hành APQB. Gọi F là giao điểm của PH và AQ. Chứng minh: HFKQ là hình thang.

Bài 31: Cho tam giác ABC. Ở miền ngoài của tam giác dựng các hình vuông ABEF và ACGH. Chứng minh rằng đường cao dựng từ đỉnh A của tam giác ABC là đường trung tuyến của tam giác AHF.

Bài 32: Trên các cạnh của một tứ giác bất kỳ, vẽ phía ngoài của nó dựng các hình vuông. Chứng minh rằng tâm của các hình vuông đó là đỉnh của một tứ giác có các đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.

Bài 33: Cho tam giác ABC nhọn, có I là trung điểm của AC. Bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông BCKL và BAED. Chứng minh: $DL = 2BI$.

Bài 34: Cho tam giác ABC. Ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông BCDE, ACFG, ABKH và các hình bình hành BEQK, CDPF. Chứng minh tam giác APQ vuông cân.

Bài 35: Cho tam giác ABC nhọn có cạnh BC cố định nằm trên đường thẳng xy. Vẽ hai tam giác vuông cân ABD và ACE ở B và C cùng nằm trên cùng nửa mặt phẳng chứa điểm A có bờ là đường thẳng xy. Kẻ $DM \perp xy$ ở M và $EN \perp xy$ ở N. Kẻ $AH \perp BC$ tại H. Chứng minh:

- 1) Khi A di động thì tổng $DM + EN$ không đổi
- 2) Đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định

Bài 36: Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân APB (góc P = 90°), tam giác vuông cân CAN (góc N = 90°). Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tam giác MNP vuông cân.

Bài 37: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, vẽ phía ngoài tam giác, vẽ tam giác đều BCD. Chứng minh rằng:

- a) AD là tia phân giác của \widehat{BAC}
- b) $AB = AC + AD$

Bài 38: Cho điểm M thuộc đoạn AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tam giác đều AMC, BMD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Chứng minh tam giác MEF là tam giác đều.

Bài 39: Cho tam giác ABC nhọn, vẽ phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD, ACE, M là giao điểm của DC và BE. Chứng minh:

- a) $\triangle ABE = \triangle ADC$
- b) $\widehat{BMC} = 120^\circ$

BÀI 6. ĐỊNH LÝ THALES

I. BÀI TẬP CƠ BẢN

ĐOẠN THẲNG TỈ LỆ

Bài 1: Hãy cho biết MA, MB và AB có bao nhiêu "phần" rồi vẽ hình đúng tỉ lệ trong từng câu sau

- 1) M là điểm chia trong của đoạn thẳng AB theo tỉ số $k = \frac{5}{2}$ (nghĩa là M thuộc đoạn thẳng AB và $MA : MB = k$).
- 2) M là điểm chia ngoài của đoạn thẳng AB theo tỉ số $k = \frac{2}{5}$ (nghĩa là M, A, B thẳng hàng nhưng M không thuộc đoạn thẳng AB và $MA : MB = k$).

Bài 2: Cho M là điểm chia trong của đoạn AB theo tỉ số k. Vẽ hình đúng tỉ lệ (không cần đúng độ dài) rồi tính MA và MB, biết

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $AB = 28\text{cm}, k = 4 : 3$ | 2) $AB = 33\text{cm}, k = 3 : 8$ |
| 3) $AB = 15\text{cm}, k = 2 : 3$ | 4) $AB = 21\text{cm}, k = 5 : 2$ |
| 5) $AB = 40\text{cm}, k = 3 : 5$ | 6) $AB = 35\text{cm}, k = 6$ |
| 7) $AB = 30\text{cm}, k = 4$ | 8) $AB = 28\text{cm}, k = 1 : 6$ |

Bài 3: Cho M là điểm chia ngoài của đoạn AB theo tỉ số k. Vẽ hình đúng tỉ lệ (không cần đúng độ dài) rồi tính MA và MB, biết

1) $AB = 18\text{cm}, k = 1 : 3$

2) $AB = 15\text{cm}, k = 5 : 2$

3) $AB = 33\text{cm}, k = 4$

4) $AB = 40\text{cm}, k = 3 : 5$

5) $AB = 35\text{cm}, k = 6$

6) $AB = 30\text{cm}, k = 4$

ĐỊNH LÝ THALES THUẬN

Bài 4: Cho $\widehat{xAy} < 90^\circ$. Trên Ax lấy $AB = 5\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$ (B nằm giữa A và C). Trên tia Ay lấy $AD = 7,5\text{cm}$. Từ C vẽ đường thẳng song song với BD cắt Ay ở E. Tính DE.

Bài 5: Cho $\widehat{xAy} < 90^\circ$. Trên tia Ax lấy hai điểm B và C ($AB < AC$). Trên tia Ay lấy hai điểm D và E sao cho $BD \parallel CE$. Giả sử $AB = 5\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, $AD = 2,5\text{cm}$. Tính AE.

Bài 6: Cho $\widehat{xAy} < 90^\circ$. Trên tia Ax lấy hai điểm B và C ($AB < AC$). Trên tia Ay lấy hai điểm D và E sao cho $BD \parallel CE$. Giả sử $AB = 6\text{cm}$, $BC = 9\text{cm}$, $DE = 3\text{cm}$. Tính AC và AE.

Bài 7: Cho $\widehat{xAy} < 90^\circ$. Trên tia Ax lấy hai điểm B và C ($AB < AC$). Trên tia Ay lấy hai điểm D và E sao cho $BD \parallel CE$. Giả sử $AB = 4,5\text{cm}$, $BC = 2,5\text{cm}$, $AD = 13,5\text{cm}$. Tính AE.

Bài 8: Cho $\widehat{xAy} < 90^\circ$. Trên tia Ax lấy hai điểm B và C ($AB < AC$). Trên tia Ay lấy hai điểm D và E sao cho $BD \parallel CE$. Giả sử $B = 5\text{cm}$, $AC = 7,5\text{cm}$, $DE = 2\text{cm}$. Tính AD.

Bài 9: Cho $\widehat{xAy} < 90^\circ$. Trên tia Ax lấy hai điểm B và C ($AB < AC$). Trên tia Ay lấy hai điểm D và E sao cho $BD \parallel CE$. Giả sử $AC = 18\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, $AD = 3\text{cm}$. Tính AE.

Bài 10: Cho tam giác OBC có $OB = 2\text{cm}$, $OC = 3\text{cm}$. Kéo dài từ B đến O thành đoạn thẳng $BA = 6\text{cm}$. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt OC kéo dài tại D. Tính CD và OD.

Bài 11: Cho tam giác OAC có $OA = 2,5\text{cm}$, $OC = 3\text{cm}$. Từ A đến O, kéo dài thành đoạn thẳng $AB = 10\text{cm}$. Đường thẳng qua B và song song với cạnh AC cắt CO kéo dài tại D. Tính OD.

Bài 12: Cho đoạn thẳng $AB = 6\text{cm}$ và điểm O thuộc đoạn thẳng AB, $OA = 4\text{cm}$. Đường thẳng xy qua O. Lấy C thuộc tia Ox, $OC = 3\text{cm}$. Lấy D trên tia Oy sao cho $AD \parallel BC$. Tính OD và CD.

Bài 13: Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}$. Điểm D trên cạnh AB sao cho $AD = 3\text{cm}$. Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho $DE \parallel BC$. Giả sử $AE + AC = 14\text{cm}$. Tính tỉ số giữa AE và AC rồi tính độ dài của AE, AC, EC.

Bài 14: Cho tam giác ABC có $AB = 5\text{cm}$. Điểm D trên cạnh AB sao cho $DB = 1,5\text{cm}$. Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho $DE \parallel BC$. Giả sử $AC + EC = 13\text{cm}$. Tính tỉ số giữa AC và EC rồi tính AC, EC, AE.

Bài 15: Cho tam giác ADE có $AD = 5\text{cm}$. Kéo dài AD thêm một đoạn $DB = 3\text{cm}$. Từ B kẻ tia song song với DE và cắt tia AE tại C. Giả sử $AE - EC = 3\text{cm}$. Tính AE, EC và AC.

Bài 16: Cho tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$. Điểm D trên cạnh AB sao cho $AD = 4\text{cm}$. Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho $DE \parallel BC$. Giả sử $AE - EC = 1,5\text{cm}$. Tính tỉ số giữa AE và EC rồi tính AE, EC và AC.

Bài 17: Cho tam giác ABC. Điểm D trên cạnh AB sao cho $AD = 2DB$. Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho $DE \parallel BC$. Giả sử $AE + AC = 15\text{cm}$. Tính tỉ số giữa AE và AC rồi tính AE, AC, EC.

Bài 18: Cho tam giác ABC. Điểm D trên cạnh AB sao cho $3AD = 2DB$. Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho $DE \parallel BC$. Giả sử $AC + EC = 16\text{cm}$. Tính AC, EC và AE.

Bài 19: Cho đoạn thẳng $AB = 5\text{cm}$ chứa điểm O sao cho $AO = 3\text{cm}$. Đường thẳng xy qua O. Lấy điểm C trên tia Ox và D trên tia Oy sao cho $AC \parallel BD$. Giả sử $OC - OD = 1,5\text{cm}$. Tính tỉ số giữa OC và OD rồi tính OC, OD và CD.

Bài 20: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Lấy I trên cạnh AD và K trên cạnh BC sao cho $IK \parallel AB$. Chứng minh $\frac{AI}{AD} = \frac{BK}{BC}$ (Gợi ý: nối BD cắt IK tại E rồi dùng định lý Thales trong hai tam giác).

Bài 21: Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở trọng tâm G. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng BD và N thuộc đoạn thẳng CD sao cho $GM \parallel AB$, $GN \parallel AC$. Tính $\frac{BM}{BC}$, $\frac{NC}{BC}$ rồi chứng minh $BM = MN = NC$.

Bài 22: Cho góc \widehat{xAy} nhọn. Trên tia Ax lấy $AB < AC$. Từ B và C vẽ hai đường thẳng song song cắt Ay ở D và E. Từ E vẽ đường thẳng song song với CD cắt Ax ở F. Tỉ số $\frac{AD}{AE}$ bằng với những tỉ số nào trên tia Ax? Chứng minh $AC^2 = AB \cdot AF$.

Bài 23: Cho hình bình hành ABCD. Vẽ tia Ax cắt đường chéo BD ở I, cắt tia BC ở J và cắt tia DC ở K.

1) Theo định lý Thales thì tỉ số $\frac{ID}{IB}$ bằng với những tỉ số nào? Chứng minh $IA^2 = IJ \cdot IK$.

2) Hai tỉ số $\frac{AI}{AJ}$ và $\frac{AI}{AK}$ bằng tỉ số nào trên đường chéo BD? Chứng minh $\frac{1}{AJ} + \frac{1}{AK} = \frac{1}{AI}$.

Bài 24: Cho hình bình hành ABCD. Đường thẳng qua A cắt CD, BD và cắt đường thẳng BD lần lượt tại G, K, và E (G, K và E nằm ngoài các đoạn thẳng CD, CB và BD). Chứng minh $EA^2 = EK.EG$.

Bài 25: Cho ΔABC . Đường thẳng song song với BC cắt AC ở E và đường thẳng kẻ từ C song song với AB cắt đường thẳng trước tại F. BF cắt AC tại S. Chứng minh: $SC^2 = SE.SA$.

Bài 26: Cho ΔCAB và điểm P trên cạnh AC sao cho $PC = 3PA$. Từ P kẻ đường thẳng song song với AB cắt CB ở Q. Từ B kẻ tia song song với AC cắt PQ tại R. Tỉ số $\frac{PQ}{PR}$ bằng tỉ số nào trên cạnh BC? Tính $\frac{PQ}{PR}$.

Bài 27: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AD có điểm I sao cho $ID = 2IA$. Đường thẳng qua I và song song với AB cắt CA và CB ở K và H. Tính $\frac{IK}{IH}$.

Bài 28: Cho tam giác ABC. Lấy điểm I trên cạnh AB. Lấy điểm K trên cạnh AC và điểm D trên cạnh BC sao cho $IK \parallel BC$ và $ID \parallel AC$. Chứng minh $\frac{CD}{CB} + \frac{CK}{CA} = 1$.

Bài 29: Cho tam giác ABC vuông cân ở A có hai đường trung tuyến BM và AH cắt nhau ở G. Kẻ AE vuông góc BM ở E và cắt BC tại F. Điểm G là gì đối với tam giác ABC và tam giác ABF? Chứng minh $FB = 2FC$.

Bài 30: Cho ΔABC có điểm O bên trong. AO cắt BC tại A_1 , BO cắt CA tại B_1 và CO cắt AB tại C_1 . Kẻ $OD \parallel AB$ (D thuộc BC) và kẻ $OE \parallel AC$ (E thuộc BC). Chứng minh:

$$1) \frac{DA_1}{BA_1} = \frac{EA_1}{CA_1} = \frac{DE}{BC}$$

$$2) \frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1 \text{ (Gợi ý: các tỉ số ở vế trái bằng với các tỉ số nào trên cạnh BC?)}$$

$$3) \frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2.$$

Bài 31: Cho tam giác ABC có D thuộc cạnh AB, E thuộc cạnh AC sao cho $DE \parallel BC$. Từ định lý Thalès thuận, hãy chứng minh hệ quả 1: các cạnh của tam giác ADE tương ứng tỉ lệ với các cạnh của tam giác ABC, nghĩa là $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. Chứng minh kết quả tương tự khi D và E nằm trên tia đối của tia AB, tia đối của tia AC (Gợi ý: lấy F thuộc đường thẳng BC sao cho $EF \parallel AB$).

Bài 32: Cho \widehat{xAy} nhọn. Trên Ax có $AB = 7,5\text{cm}$; $AD = 5\text{cm}$. Trên tia Ay có $AE = 2\text{cm}$, $EC = 1\text{cm}$ (E nằm giữa A và C). Tính $\frac{AE}{AC}$ và chứng minh $DE \parallel BC$.

Bài 33: Cho hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại A. Lấy B thuộc Ax, $BA = 3\text{cm}$; D thuộc Ax' , $BD = 7,5\text{cm}$; E thuộc Ay' , $AE = 7,5\text{cm}$; C thuộc Ay, $CE = 12,5\text{cm}$. Tính $\frac{CA}{CE}$ chứng minh $BC \parallel DE$.

Bài 34: Cho $\widehat{xBy} < 90^\circ$. Trên Bx có hai điểm A, D (A nằm giữa B và D) sao cho $\frac{DB}{DA} = \frac{11}{8}$. Trên By có hai điểm C, E (C nằm giữa B và E) sao cho $CB = \frac{3}{8}EC$. Tính $\frac{EC}{EB}$ và chứng minh $AC \parallel DE$.

Bài 35: Cho tứ giác ABCD. Qua điểm E trên cạnh AD, kẻ đường thẳng song song với DC và cắt AC ở G. Qua G kẻ đường thẳng song song với CB và cắt AB ở H.

1) Tỉ số $\frac{GA}{GC}$ bằng những tỉ số nào?

2) Chứng minh $HE \parallel BD$.

Bài 36: Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$. Từ điểm M trên BD, kẻ $ME \perp AD$ ở E, $MF \perp CD$ ở F. Chứng minh $EF \parallel AC$.

Bài 37: Cho tứ giác ABCD. Lấy điểm I trên cạnh AD sao cho $AI = 2ID$. Lấy điểm K trên cạnh BC sao cho $BC = 3BK$. Lấy điểm M trên cạnh CD sao cho $IM \parallel AC$. Chứng minh $MK \parallel BD$.

Bài 38: Cho điểm O thuộc miền trong của ΔABC . Gọi D, E, F lần lượt thuộc đoạn thẳng OA, OB, OC sao cho $DE \parallel AF$, $DF \parallel AC$. Tỉ số $\frac{DO}{DA}$ bằng những tỉ số nào? Chứng minh $EF \parallel BC$.

Bài 39: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Lấy điểm M trên cạnh AD và điểm N trên cạnh BC sao cho $\frac{DM}{DA} = \frac{BN}{BC}$. Lấy điểm I trên cạnh CD sao cho $MI \parallel AC$. Chứng minh $IN \parallel BD$.

Bài 40: Cho tứ giác ABCD. Lấy E trên cạnh AB sao cho $AE = 2EB$. Lấy F trên cạnh BC sao cho $BF = \frac{1}{2}FC$. Lấy G trên cạnh CD sao cho $CG = 2GD$. Lấy H trên cạnh DA sao cho $DH = \frac{1}{2}HA$. Hai đoạn thẳng AC và BD song song với những đường nào? Tứ giác EFGH là hình gì?

- Bài 41:** Cho tam giác ABC vuông cân ở A có đường trung tuyến BM và trọng tâm G. Lấy điểm F trên cạnh BC sao cho $FB = 2FC$. Chứng minh
- 1) $GF \parallel AC$.
 - 2) $AF \perp BM$ (Gợi ý: Kéo dài AG cắt BC ở H, FG cắt AB ở K).

HỆ QUẢ 1 CỦA ĐỊNH LÝ THALES

Bài 42: Vẽ \widehat{xAy} nhọn. Lấy điểm B và D thuộc tia Ax sao cho $AB = 5\text{cm}$, $AD = 2\text{cm}$. Lấy C thuộc Ay sao cho $BC = 7,5\text{cm}$. Kẻ $DE \parallel BC$ (E thuộc đoạn thẳng AC). Tính DE.

Bài 43: Vẽ tam giác ABC có $BC = 3\text{cm}$. Kéo dài BA thêm một đoạn $AD = 2AB$. Kéo dài CA thêm một đoạn $AE = 2AC$. Tính DE.

Bài 44: Cho $\triangle ABC$ có $AB = 12\text{cm}$. Trên cạnh AB lấy D sao cho $BD = 4\text{cm}$. Kẻ DH và BK cùng vuông góc với AC tại H và K. Tính $\frac{DH}{BK}$.

Bài 45: Cho $\triangle MBC$. Trên cạnh MB có điểm A sao cho $MA = 2AB$. Qua A kẻ đường thẳng song song BC cắt MC ở D. Giả sử $AD = 18\text{cm}$. Tính BC.

Bài 46: Cho hai tia Ax và By cố định, song song và cùng chiều. Điểm M di động trên tia Ax và điểm N di động trên tia By sao cho $\frac{AM}{BN} = \frac{1}{2}$.

Chứng minh đường thẳng MN đi qua một điểm cố định (Gợi ý: Điểm cố định là giao điểm của MN với AB).

Bài 47: Cho tam giác ABC. Điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Điểm N trên cạnh AC sao cho $CA = 3CN$.

- 1) Chứng minh $AB = 3MN$.
- 2) AM cắt BN tại G. Chứng minh $GA = 3GM$.

Bài 48: Cho hình thoi AEDF có chiều dài cạnh là x. Đường thẳng qua D cắt AF kéo dài tại B, cắt AE kéo dài tại C. Chứng minh $\frac{AC - x}{AC} = \frac{x}{AB}$. Tính x nếu $AB = 10\text{cm}$ và $AC = 15\text{cm}$.

Bài 49: Cho hình thoi AEDF nội tiếp trong tam giác ABC với $E \in AC$, $D \in CB$, $F \in BA$. Tính DE biết $AB = 60\text{cm}$, $AC = 84\text{cm}$.

Bài 50: Cho tam giác ABC có $AC = 40\text{cm}$, $AB = 24\text{cm}$, phân giác trong AD. Đường trung trực của AD cắt AC ở E. $\triangle ADE$ là tam giác gì? Tính DE.

Bài 51: Cho $\triangle ABC$ có AD là đường phân giác trong. Từ B kẻ tia song song với AC và cắt AD tại M.

- 1) Dùng hệ quả 1 của định lý Thales đối với $\triangle DAC$ thì tỉ số $\frac{DB}{DC}$ bằng với tỉ số nào?

2) $\triangle ABM$ là tam giác gì? Chứng minh hệ quả 2 của định lý Thales: đường phân giác AD của $\triangle ABC$ chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ với hai cạnh kề của hai đoạn thẳng đó, nghĩa là $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Bài 52: Cho $\triangle ABC$ không cân tại A (để dễ vẽ hình, nên vẽ góc ở đỉnh B tù) và có AE là đường phân giác ngoài (E thuộc đường thẳng BC). Từ B kẻ tia song song với AC và cắt AE tại M.

- 1) Theo hệ quả 1 của định lý Thales trong tam giác EAC thì tỉ số $\frac{EB}{EC}$ bằng với tỉ số nào?

2) $\triangle ABM$ là tam giác gì? Chứng minh $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

Bài 53: Cho ba tia Ox, Oy, Oz (tia Oy nằm giữa) và hai đường thẳng d' // d. d' cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A', B', C'; d cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Áp dụng hệ quả của định lý Thales trong $\triangle OAB$ và $\triangle OBC$, cho biết $\frac{OB'}{OB}$ bằng với tỉ số (giữa những đoạn thẳng) nào trên d' và

d? Chứng minh $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$.

Kết luận: Các tia chung gốc (hoặc các đường thẳng đồng quy) sẽ xác định trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Bài 54: Cho tam giác ABC có D, E lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $DE \parallel BC$. Trung tuyến AM của $\triangle ABC$ cắt DE ở N. Chứng minh N là trung điểm của DE.

Bài 55: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. MD là đường phân giác trong của $\triangle MAB$. Từ D kẻ đường song song với BC cắt AM và AC lần lượt tại N và E.

- 1) MN là đường gì của $\triangle DME$?
- 2) $\triangle MND$, $\triangle MNE$ và $\triangle MDE$ là các tam giác gì?
- 3) Chứng minh ME là đường phân giác của $\triangle AMC$.

Bài 56: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có AC cắt BD tại O. Gọi M là trung điểm của CD. MO cắt AB tại K. Áp dụng hệ quả của định lý Thales trong $\triangle OMC$ và $\triangle OMD$, hãy cho biết tỉ số $\frac{OK}{OM}$ bằng với những tỉ số nào trên hai đáy hình thang? Điểm K có gì đặc biệt? Vì sao?

Bài 57: Cho tam giác ABC. Kéo dài BA thêm một đoạn $AD = \frac{1}{2}AB$; kéo

dài CA thêm một đoạn $AE = \frac{1}{2}AC$. Đường trung tuyến AI của $\triangle ABC$

cắt DE tại K. Chứng minh K là trung điểm của DE.

Bài 58: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$ và $AB < CD$). AC cắt BD tại O, BC cắt AD tại I, M và K lần lượt là trung điểm của CD và AB.

- 1) Chứng minh đường thẳng MO đi qua K.
- 2) Chứng minh đường thẳng MI cũng đi qua K.
- 3) Có nhận xét gì về bốn điểm I, K, O, M?

Bài 59: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi M là trung điểm của CD. AM cắt BD tại I, BM cắt AC tại K.

- 1) Chứng minh $\frac{IM}{IA} = \frac{KM}{KB}$, rồi suy ra $IK \parallel AB \parallel CD$.
- 2) Đường thẳng IK lần lượt cắt AD và BC tại E và F. Chứng minh I là trung điểm của EK và K là trung điểm của IF.

Bài 60: Cho tam giác ABC. Lấy D thuộc AB và E thuộc BC. Đường thẳng qua D và song song BC cắt AE ở G và cắt AC ở I. Đường thẳng qua E và song song với AB cắt CD ở F.

- 1) So sánh $\frac{GD}{GI}$ và $\frac{EB}{EC}$.
- 2) Chứng minh $GF \parallel AC$.

Bài 61: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có AC cắt BD tại I. Đường thẳng qua I và song song với hai đáy cắt AD và BC lần lượt ở M và N. Chứng minh:

- 1) $\frac{MI}{AB} = \frac{CN}{CB}$ (Gợi ý: Dùng một tỉ số trung gian).
- 2) $MI = IN$.

Bài 62: Cho tam giác OMN và A là trung điểm của MN. Kẻ tia Ox song song và cùng chiều với tia MN. Một cát tuyến đi qua A cắt các tia OM, ON, và Ox lần lượt tại K, I và B. Dùng hệ quả của định lý Thalès, hãy chứng minh $\frac{KA}{KB} = \frac{IA}{IB}$.

Bài 63: Giả sử bốn điểm K, A, I, B nằm theo đúng thứ tự đó trên một đường thẳng và $\frac{KA}{KB} = \frac{IA}{IB}$ (bằng $\frac{1}{3}$ chẳng hạn). Lấy điểm O bên ngoài đường thẳng AB. Qua A, kẻ đường thẳng song song với OB và cắt hai tia OK, OI lần lượt tại M và N. Chứng minh A là trung điểm của MN.

Bài 64: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM. Điểm D thuộc đoạn thẳng BM. Từ D kẻ tia song song với AM và cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

- 1) Hai tỉ số $\frac{DE}{MA}$ và $\frac{DF}{MA}$ bằng với tỉ số giữa những đoạn thẳng

nào trên cạnh BC?

- 2) Tính $\frac{DE}{MA} + \frac{DF}{MA}$ rồi suy ra $DE + DF = 2MA$.

Bài 65: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM. Điểm D thuộc đoạn thẳng BM. Từ D kẻ tia song song với AM và cắt cạnh AB và tia CA lần lượt tại E và F. Lấy điểm I trên đoạn thẳng EF sao cho $AI \parallel BC$; điểm G trên cạnh AC sao cho $EG \parallel BC$. AM cắt EG tại K. Chứng minh:

- 1) K là trung điểm của EG.
- 2) A là trung điểm của FG và I là trung điểm của EF.

Bài 66: Cho tam giác ABC. Lấy điểm D tùy ý trên cạnh BC. Kẻ tia Bx $\parallel AD$ và Bx cắt tia CA ở I. Kẻ tia Cy $\parallel AD$ và Cy cắt tia BA ở K. Dùng hệ quả của định lý Thalès, tính $\frac{AD}{BI} + \frac{AD}{CK}$ rồi suy ra $\frac{1}{BI} + \frac{1}{CK} = \frac{1}{AD}$.

Bài 67: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$ và $AB < CD$). AC cắt BD ở O. Đường thẳng qua O và song song với hai đáy cắt AD và BC ở I và K. Chứng minh:

- 1) $\frac{OI}{AB} + \frac{OI}{CD} = 1$ và $\frac{OK}{AB} + \frac{OK}{CD} = 1$.
- 2) $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{IK}$ (Gợi ý: chứng minh $\frac{IK}{AB} + \frac{IK}{CD} = 2$).

Bài 68: Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng qua A cắt tia đối của tia BD tại I và cắt tia CB, tia CD tại H và K.

- 1) Chứng minh $\frac{AH}{AK} = \frac{HB}{AD}$.
- 2) Hai tỉ số $\frac{AH}{AK}$ và $\frac{AH}{AI}$ bằng với những tỉ số nào trên ID?
- 3) Chứng minh $\frac{1}{AI} + \frac{1}{AK} = \frac{1}{AH}$.

Bài 69: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Lấy điểm M trên cạnh AD và điểm N trên cạnh BC sao cho $\frac{DM}{DA} = \frac{BN}{BC}$. Lấy điểm I trên cạnh CD sao cho $MI \parallel AC$. MN cắt BD và AC tại E và F; AC cắt BD tại O; IM cắt DO tại K; IN cắt CO tại H. Chứng minh:

- 1) $IN \parallel BD$.
- 2) $\frac{MK}{MI} = \frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD} = \frac{NH}{NI}$.
- 3) $\frac{ME}{MN} = \frac{NF}{NM}$, suy ra $ME = NF$.

TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG HAY NGOÀI CỦA TAM GIÁC (HỆ QUẢ 2 CỦA ĐỊNH LÝ THALES)

Bài 70: Cho tam giác ABC có AI và AK lần lượt là đường phân giác trong và ngoài. Chứng minh $\frac{IB}{IC} = \frac{KB}{KC} = t$. Trong mỗi câu sau đây, chỉ

cần vẽ đoạn thẳng chứa các điểm K, I, B, C rồi:

- 1) Tính t, IB, KB, IK nếu AB = 3cm, AC = 6cm, BC = 6cm.
- 2) Tính t, IC, KC, IK nếu AB = 6cm, AC = 4cm, BC = 5cm.
- 3) Tính t, IB, KB, IK nếu AB = 12cm, AC = 30cm, BC = 21cm.
- 4) Tính t, IB, KB, IK nếu AB = 9cm, AC = 15cm, BC = 8cm.
- 5) Tính t, IC, KC, IK nếu AB = 42cm, AC = 24cm, BC = 33cm.
- 6) Tính t, IC, KC, IK nếu AB = 6cm, AC = 3cm, BC = 6cm.

Bài 71: Cho tam giác ABC có AB = 25cm, BC = 20cm, CA = 24cm, đường phân giác trong AD, đường phân giác ngoài AE. Gọi AM là đường trung tuyến của tam giác ADE. Tam giác ADE là tam giác gì? Tính DE và AM.

Bài 72: Cho tam giác ABC có hai đường phân giác AE và BD cắt nhau tại O. Giả sử AB = 12cm, $\frac{OA}{OE} = \frac{3}{2}$ và $\frac{DA}{DC} = \frac{6}{7}$. Tính:

- 1) BE.
- 2) BC.
- 3) AC.

Bài 73: Cho tam giác ABC có cạnh AB = c, AC = b và đường phân giác AD cắt đường trung tuyến CM ở I. Tính các tỉ số $\frac{IC}{IM}$ và $\frac{CD}{CB}$ theo b, c.

Bài 74: Cho tam giác ABC có chiều dài ba cạnh là BC = a, CA = b, AB = c và AD là đường phân giác.

- 1) Tính tỉ số $\frac{DB}{DC}$ theo b và c. Tính DB, DC theo a, b, c.
- 2) Đường phân giác trong của góc B cắt AD tại I. Tính $\frac{IA}{ID}$ theo a, b, c.

Bài 75: Cho tam giác ABC có AB < AC (vẽ góc ở đỉnh B tù thì hình sẽ gọn hơn) và có đường phân giác trong AD, đường phân giác ngoài AE. Đường thẳng song song với AB và đi qua C cắt tia AD và tia EA lần lượt ở I và K.

- 1) Chứng minh C là trung điểm của IK. (Gợi ý: chứng minh $\frac{AB}{CK} = \frac{AB}{CI}$).
- 2) Đường thẳng song song với AC và đi qua B cắt tia AD và cắt AE ở I' và K'. Chứng minh B là trung điểm của I'K'. (Gợi ý: chứng minh $\frac{BI'}{AC} = \frac{BK'}{AC}$).

Bài 76: Chứng minh rằng có duy nhất điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $\frac{MA}{MB} = k$, k là số dương cho trước. (Gợi ý: giả sử có điểm M' sao cho $\frac{M'A}{M'B} = k$, hãy chứng minh AM = AM').

Bài 77: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM và MD là đường phân giác trong tam giác MAB. Từ D kẻ đường song song với BC cắt AC tại E. Chứng minh:

$$1) \frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MB}.$$

2) ME là đường phân giác của tam giác MAC.

Bài 78: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM. Gọi MD và ME lần lượt là hai đường phân giác trong tam giác AMB và tam giác AMC.

1) Chứng minh DE // BC.

2) Đặt BC = a, AM = m. Tính $\frac{DA}{DB}$, $\frac{EA}{BA}$ và DE theo a và m.

3) Tìm điều kiện của ΔABC để DE là đường trung bình của ΔABC .

II. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 79: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến BM và trọng tâm G. Qua G kẻ đường thẳng song song với AC cắt BA và BC tại D và E. Giả sử chu vi tam giác ABC là 75 và AD + EC = 16.

- 1) Chứng minh BD = 2AD, BE = 2CE.
- 2) Tính BA + BC và tính AC, DE.

Bài 80: Cho tam giác ABC cân ở C có đường cao BD = x và AB < AC. Lấy điểm E và F lần lượt thuộc cạnh BA và BC sao cho BE = BF = x. Từ E kẻ tia song song với AC và cắt BD, BC tại K và N. Từ F kẻ tia song song với AC và cắt BD, BA tại I và M. Giả sử EM = 9cm, IK = 6cm, FN = 12cm.

- 1) Dùng định lý Thalès trong tam giác BEN, hãy tính x, FM và BM.
- 2) Tính BI.
- 3) Tính BA và BC.

Bài 81: Cho hình thang cân ABCD (BC // AD và BC < AD). Tia AB cắt tia DC tại M. Đường cao BE của hình thang cắt AC tại F. Giả sử AB = 20cm và $\frac{AF}{FC} = \frac{2}{3}$.

- 1) Chứng minh AD = 2AE + BC và tính $\frac{BC}{AD}$.
- 2) Tính BM.

Bài 82: Cho tam giác ABC. Lấy điểm D tùy ý trên cạnh BC. Kẻ tia Bx // AD và Bx cắt tia CA ở I. Kẻ tia Cy // AD và Cy cắt tia BA ở K.

- 1) Chứng minh $\frac{1}{BI} + \frac{1}{CK} = \frac{1}{AD}$. (Gợi ý: Tính $\frac{AD}{BI} + \frac{AD}{CK}$).

- 2) Nếu $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và AD là đường phân giác của tam giác ABC thì hãy chứng minh $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$. (Gợi ý: nhận xét gì về tam giác ABI và tam giác ACK?)
- 3) Nếu $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và AD là đường phân giác của tam giác ABC thì hãy chứng minh $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$.

Bài 83: Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và AD là đường phân giác. Lấy điểm E trên cạnh AC và điểm F trên cạnh AB sao cho $DE \parallel AB$ và $DF \parallel AC$.

- 1) Chứng minh $\frac{DE}{AB} + \frac{DF}{AC} = 1$.
- 2) Tam giác ADE và tam giác ADF có gì đặc biệt? Vì sao?
- 3) Chứng minh $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$.

Bài 84: Cho tam giác ABC vuông ở A có AD là đường phân giác. Giả sử $AB = 3a$, $AD = 2a\sqrt{2}$. Kẻ DE vuông góc với AC tại E.

- 1) Tính AE, DE theo a.
- 2) Chứng minh $\frac{AC - AE}{AC} = \frac{DE}{AB}$ rồi tính AC theo a.

Bài 85: Cho tam giác ABC vuông ở A, $AB = x$, $AC = y$. Ở phía ngoài tam giác ABC, dựng tam giác ABD vuông cân ở B và tam giác ACE vuông cân ở C. CD cắt AB ở I và BE cắt AC ở K.

- 1) Chứng minh $\frac{IA}{IB} = \frac{y}{x} = \frac{KC}{KA}$. Tính IA và KA theo x và y.
- 2) Chứng minh $IA^2 = IB \cdot KC$.

Bài 86: Cho tam giác ABC vuông cân ở A. Lấy các điểm D, E, F lần lượt nằm trên cạnh BC, CA, AB sao cho $\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB}$. Lấy G trên cạnh

AB sao cho $DG \parallel AC$. Chứng minh:

- 1) $BF = AE = AG$.
- 2) AD vuông góc với EF. (Gợi ý: So sánh tam giác AEF và tam giác AGD).

Bài 87: Cho tam giác ABC đều. Lấy C_1 trên cạnh AB và B_1 trên cạnh AC sao cho $AC_1 = CB_1$. Điểm M di động trên cạnh BC.

- 1) Chứng minh $BB_1 = CC_1$. Đặt $BB_1 = CC_1 = x$.
- 2) Kẻ $MI \parallel BB_1$ và $MK \parallel CC_1$ (K thuộc AB và I thuộc AC). Tỷ số $\frac{MI}{x}$ và $\frac{MK}{x}$ bằng với tỷ số nào trên cạnh BC?
- 3) Chứng minh $MI + MK$ và $\widehat{IMC} + \widehat{KMB}$ không đổi khi M di động.

Bài 88: Cho tam giác ABC đều có điểm M di động trên cạnh BC. Điểm I trên cạnh AC di động theo M và điểm K trên cạnh AB cũng di động theo M sao cho $\widehat{IMC} = 20^\circ$ và $\widehat{KMB} = 40^\circ$. Chứng minh $MI + MK$ không đổi khi M di động. (Gợi ý: lấy $B_1 \in AC$ sao cho $\widehat{B_1BC} = 20^\circ$ và lấy $C_1 \in AB$ sao cho $\widehat{C_1CB} = 40^\circ$ rồi làm giống bài trên.)

Bài 89: Vẽ tứ giác ABCD có AC cắt BD ở O sao cho $OC > OA$; $OD > OB$. Lấy M và N là trung điểm của BD và AC. Đường thẳng MN cắt AD và BC lần lượt ở I và K. Kẻ hai tia Ax và Cy cùng song song với BD và cùng cắt đường thẳng IK lần lượt ở E và F. Chứng minh:

- 1) $\frac{DM}{AE} = \frac{BM}{CF}$
- 2) $\frac{DI}{IA} = \frac{BK}{KC}$

Bài 90: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Trên tia BC lấy $BA' = 2BC$; trên tia CA lấy $CB' = 2CA$; trên tia AB lấy $AC' = 2AB$. Gọi D là trung điểm của $A'B'$.

- 1) Tứ giác ADMB là hình gì đặc biệt? Chứng minh $AC' = 2DM$.
- 2) AM cắt $C'D$ tại G. Chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Bài 91: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM. Điểm D thuộc đoạn thẳng BM. Từ D kẻ tia song song với AM cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

- 1) Chứng minh $\frac{DE}{DB} = \frac{DF}{DC}$.
- 2) Giả sử $DE \cdot DF = DB \cdot DC$. Chứng minh $\triangle ABC$ vuông ở A.
- 3) Giả sử $DE \cdot DF = DB \cdot DC$. Chứng minh $DE + DF = DB + DC$.

Bài 92: Cho tam giác OMN và A là trung điểm của MN. Kẻ tia Ox song song và cùng chiều với tia MN. Một cát tuyến đi qua A cắt các tia OM, ON, và Ox lần lượt tại K, I và B. Chứng minh $\frac{KA}{KB} = \frac{IA}{IB}$.

Bài 93: Giả sử bốn điểm K, A, I, B nằm theo đúng thứ tự đó trên một đường thẳng và $\frac{KA}{KB} = \frac{IA}{IB}$. Lấy điểm O bên ngoài đường thẳng AB. Qua A, kẻ đường thẳng song song với OB và cắt hai tia OK, OI lần lượt tại M và N. Chứng minh A là trung điểm của MN.

Bài 94: Giả sử bốn điểm K, A, I, B nằm theo đúng thứ tự đó trên một đường thẳng và $\frac{KA}{KB} = \frac{IA}{IB}$. Lấy điểm O bên ngoài đường thẳng AB. Kẻ đường thẳng không song song với AB và cắt bốn tia OK, OA, OI và OB lần lượt tại K_1 , A_1 , I_1 và B_1 . Vẽ MN và M_1N_1 lần lượt đi qua A và A_1 và cùng song song với tia OB; M và M_1 thuộc tia OK, N và N_1 thuộc tia OI. Chứng minh:

1) A là trung điểm của MN, A_1 là trung điểm của M_1N_1 .

$$2) \frac{K_1A_1}{K_1B_1} = \frac{I_1A_1}{I_1B_1}$$

Bài 95: Chứng minh rằng có duy nhất điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $\frac{MA}{MB} = t$, t là số dương cho trước. (Gợi ý: giả sử có điểm M' sao cho $\frac{M'A}{M'B} = t$, hãy chứng minh $AM = AM'$).

Bài 96: Cho tam giác ABC có điểm M trên cạnh BC sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

Chứng minh AM là đường phân giác của $\triangle ABC$.

Bài 97: Cho tam giác ABC có A' , B' , C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Trên $B'C'$ có điểm A_1 sao cho $\frac{A_1B'}{A_1C'} = \frac{AB}{AC}$. Chứng minh

$$\widehat{A_1A'B'} = \widehat{A_1A'C'}$$

Bài 98: Cho tam giác ABC có đường phân giác AA' . Vẽ $A'E \parallel AB$ (E thuộc cạnh AC).

1) Chứng minh $A'E = AE (= x)$ và $\frac{x}{AB} = \frac{AC - x}{AC}$. Tính x theo AB, AC.

2) Áp dụng bất đẳng thức trong $\triangle AA'E$, chứng minh $AA' < \frac{2AB \cdot AC}{AB + AC}$.

$$\text{Suy ra } \frac{1}{AA'} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right).$$

3) Nếu BB' và CC' là hai đường phân giác còn lại của tam giác ABC, chứng minh rằng $\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} > \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$.

Bài 99: Cho tam giác ABC có hai đường phân giác AE và BD cắt nhau tại O. Biết $AB = 12\text{cm}$, $\frac{OA}{OE} = \frac{3}{2}$ và $\frac{DA}{DC} = \frac{6}{7}$. Tính AC.

Bài 100: Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

1) Chứng minh $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AF}{AB}$ và tính tỉ số hai diện tích đó theo

a, b, c. Sau đó rút ra hai kết quả tương tự.

2) Tính tỉ số $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}$ theo a, b, c.

Bài 101: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ với $b > c$ và có hai đường phân giác BD và CE. Vẽ hình bình hành BEKD.

1) So sánh \widehat{ABC} và \widehat{ACB} rồi chứng minh $\widehat{EKD} > \widehat{ECD}$.

2) Tính CD, KD theo a, b, c rồi chứng minh $CD > DK$. Kết hợp câu trên hãy chứng minh $\widehat{EKC} > \widehat{ECK}$, suy ra $CE > BD$.

Bài 102: Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và hai đường phân giác BD, CE. Đường thẳng qua D và song song với BC cắt AB ở K.

1) Chứng minh $\frac{EA}{EB} > \frac{DA}{DC}$ rồi suy ra $1 + \frac{EA}{EB} > 1 + \frac{DA}{DC}$.

2) Chứng minh $BE < BK$. So sánh \widehat{EDB} với \widehat{EBD} và BE với ED.

3) Kẻ $EI \parallel BC$, I thuộc đoạn thẳng CD. So sánh \widehat{DCE} với \widehat{DEC} . Chứng minh $BE < ED < DC$.

Bài 103: Cho tam giác ABC có đường phân giác AE cắt đường trung tuyến BD tại O. Đường thẳng qua O song song với AC cắt AB và BC tại F và K. Giả sử $AF = 12\text{cm}$, $AC = 40\text{cm}$, $CK = 14\text{cm}$. Dùng tính chất đường phân giác trong tam giác ABD, hãy chứng minh $\frac{AF}{AB - AF} = \frac{AD}{AB}$. Tính AB, $\frac{CK}{KB}$ và BC.

Bài 104: Cho tam giác ABC có ba đường phân giác trong AD, BE, CF đồng quy tại O. DE cắt CO tại K, DF cắt BO tại I. Từ D kẻ tia song song với AB cắt tia AI tại G, từ D kẻ tia song song với AC cắt tia AK tại H. Chứng minh:

1) $\widehat{ADG} = \widehat{ADH}$.

2) $\frac{DG}{FA} = \frac{BD}{BF}$ và $\frac{DH}{EA} = \frac{CD}{CE}$ (Gợi ý: dùng tỉ số trung gian).

3) $DG = DH$ và AD là tia phân giác của \widehat{IAK} .

Bài 105: Cho tam giác ABC có I là giao điểm của ba đường phân giác. Đường thẳng qua I cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại A' , B' và C' sao cho A' và B' nằm ở cùng phía đối với điểm I.

1) Kẻ $CK \parallel A'C'$ với K thuộc tia AB. Chứng minh $\frac{BC}{BA'} \cdot \frac{BC'}{BA} +$

$$\frac{AC}{AB'} \cdot \frac{AC'}{AB} = 1.$$

2) Chứng minh $\frac{BC}{BA} \cdot \frac{IC'}{IA'} = \frac{BC}{BA'} \cdot \frac{BC'}{BA}$ và $\frac{AC}{AB} \cdot \frac{IC'}{IB'} = \frac{AC}{AB'} \cdot \frac{AC'}{AB}$.

3) Chứng minh $\frac{BC}{IA'} + \frac{AC}{IB'} = \frac{AB}{IC'}$.

Bài 106: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM và trọng tâm G. Một cát tuyến đi qua G cắt tia AB và tia AC ở I và K. Kẻ $BE \parallel CF \parallel IK$ với E và F trên tia AM. Chứng minh:

$$1) AE + AF = 2AM.$$

$$2) \frac{AB}{AI} + \frac{AC}{AK} = 3.$$

Bài 107: Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến và G là trọng tâm. Một đường thẳng qua G cắt các đường thẳng BC, CA và AB lần lượt tại A', B' và C' sao cho A' và B' ở cùng một phía đối với G. Kẻ BI và CK song song với B'C' (I và K thuộc đường thẳng AM). Chứng minh:

- 1) $BI = CK$.
- 2) $\frac{GC'}{GA'} = \frac{GC'}{IB} \cdot \frac{IB}{GA'} = \frac{2MI}{AI}$ và $\frac{GC'}{GB'} = \frac{GC'}{IB} \cdot \frac{KC}{GB'} = \frac{AK}{AI}$.
- 3) $\frac{1}{GA'} + \frac{1}{GB'} = \frac{1}{GC'}$.

Bài 108: Cho tam giác ABC đều có điểm M ở bên trong tam giác. Kẻ MH vuông góc BC ở H, MI vuông góc CA ở I và MK vuông góc AB ở K.

- 1) Sử dụng công thức tính diện tích tam giác, hãy chứng minh ba đường cao của ΔABC có cùng chiều dài h.
- 2) Chứng minh $MH + MI + MK = h$.
- 3) Giả sử ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của ΔABC cắt nhau tại trực tâm O. Chứng minh $\frac{MH}{OA_1} + \frac{MI}{OB_1} + \frac{MK}{OC_1} = 3$.
- 4) Giả sử đường thẳng OM cắt BC, CA, AB lần lượt tại A_2, B_2, C_2 . Chứng minh $\frac{A_2M}{A_2O} + \frac{B_2M}{B_2O} + \frac{C_2M}{C_2O} = 3$.

III. BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 109: Cho tam giác ABC cân ở C có đường cao $BD = x$ và $AB < AC$. Lấy điểm E và F lần lượt thuộc cạnh BA và BC sao cho $BE = BF = x$. Từ E kẻ tia song song với AC và cắt BD, BC tại K và N. Từ F kẻ tia song song với AC và cắt BD, BA tại I và M. Giả sử $EM = 9\text{cm}$, $IK = 6\text{cm}$, $FN = 12\text{cm}$. Tính BA và BC.

Bài 110: Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và AD là đường phân giác.

Chứng minh $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$.

Bài 111: Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và AD là đường phân giác.

Chứng minh $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$.

Bài 112: Cho góc xAy vuông có tia phân giác At. Điểm D cố định trên At. Đường thẳng d quay quanh D cắt Ax và Ay lần lượt tại B và C.

Chứng minh $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ có giá trị không đổi khi d quay quanh D.

Bài 113: Cho tam giác ABC vuông ở A có AD là đường phân giác. Giả sử $AB = 3a$, $AD = 2a\sqrt{2}$. Tính AC theo a.

Bài 114: Vẽ tứ giác ABCD có AC cắt BD ở O sao cho $OC > OA$, $OD > OB$. Lấy M và N là trung điểm của BD và AC. Đường thẳng MN cắt AD và BC lần lượt ở I và K. Chứng minh $\frac{DI}{IA} = \frac{BK}{KC}$.

Bài 115: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$ và $AB < CD$). AC cắt BD ở O. Đường thẳng qua O và song song với hai đáy cắt AD và BC ở I và K. Chứng minh $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{IK}$.

Bài 116: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Lấy điểm M trên cạnh AD và điểm N trên cạnh BC sao cho $\frac{DM}{DA} = \frac{BN}{BC}$. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của MN với BD và AC. Chứng minh $ME = NF$.

Bài 117: Cho tam giác ABC vuông ở A, $AB = x$, $AC = y$. Ở phía ngoài ΔABC , dựng tam giác ABD vuông cân ở B và tam giác ACE vuông cân ở C. CD cắt AB ở I và BE cắt AC ở K. Chứng minh $IA^2 = IK^2 = IB \cdot KC$.

Bài 118: Cho tam giác ABC vuông cân ở A. Lấy các điểm D, E, F lần lượt nằm trên cạnh BC, CA, AB sao cho $\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB}$. Chứng minh AD vuông góc với EF.

Bài 119: Cho tam giác ABC. Trên tia BC lấy $BA' = 2BC$; trên tia CA lấy $CB' = 2CA$; trên tia AB lấy $AC' = 2AB$. Chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Bài 120: Cho tam giác ABC đều có điểm M di động trên cạnh BC. Điểm I trên cạnh AC di động theo M và điểm K trên cạnh AB cũng di động theo M sao cho $\widehat{IMC} = 20^\circ$ và $\widehat{KMB} = 40^\circ$. Chứng minh $MI + MK$ không đổi khi M di động.

Bài 121: Giả sử bốn điểm K, A, I, B nằm theo đúng thứ tự đó trên một đường thẳng và $\frac{KA}{KB} = \frac{IA}{IB}$. Lấy điểm O bên ngoài đường thẳng AB. Kẻ đường thẳng cắt bốn tia OK, OA, OI và OB lần lượt tại K_1, A_1, I_1 và B_1 . Chứng minh $\frac{K_1A_1}{K_1B_1} = \frac{I_1A_1}{I_1B_1}$.

Bài 122: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Điểm D thuộc đoạn BM. Từ D kẻ tia song song với AM cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Giả sử $DE \cdot DF = DB \cdot DC$, chứng minh tam giác ABC vuông ở A.

Bài 123: Cho tam giác ABC có đường phân giác AE cắt đường trung tuyến BD tại O. Đường thẳng qua O song song với AC cắt AB và BC tại F và K. Giả sử $AF = 12\text{cm}$, $AC = 40\text{cm}$, $CK = 14\text{cm}$. Tính BA và BC.

Bài 124: Cho tam giác ABC có phân giác AA', BB', CC'. Chứng minh

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} > \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$$

Bài 125: Cho tam giác ABC có AB < AC và hai đường phân giác BD, CE. Chứng minh BE < ED < DC.

Bài 126: Cho tam giác ABC có A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Trên B'C', C'A', A'B' lần lượt có các điểm A₁, B₁, C₁ sao cho $\frac{A_1B'}{A_1C'} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{B_1C'}{B_1A'} = \frac{BC}{BA}$ và $\frac{C_1A'}{C_1B'} = \frac{CA}{CB}$. Chứng minh A'A₁, B'B₁ và C'C₁ đồng qui.

Bài 127: Cho tam giác ABC có AC > AB và có hai đường phân giác BD và CE. Chứng minh CE > BD.

Bài 128: Cho tam giác ABC có ba đường phân giác trong AD, BE, CF đồng qui tại O. DE cắt CO tại K, DF cắt BO tại I. Chứng minh AD là tia phân giác của IAK.

Bài 129: Cho tam giác ABC đều có điểm M bên trong. Giả sử ba đường cao AA₁, BB₁, CC₁ của ΔABC cắt nhau tại trực tâm O và đường thẳng OM cắt BC, CA, AB lần lượt tại A₂, B₂, C₂. Chứng minh $\frac{A_2M}{A_2O} + \frac{B_2M}{B_2O} + \frac{C_2M}{C_2O} = 3$.

Bài 130: Cho ΔABC có điểm O bên trong. AO cắt BC tại A₁, BO cắt CA tại B₁ và CO cắt AB tại C₁. Chứng minh $\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2$.

Bài 131: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Một cát tuyến đi qua G cắt tia AB và tia AC ở I và K. Chứng minh $\frac{AB}{AI} + \frac{AC}{AK} = 3$.

Bài 132: Cho tam giác ABC có I là giao điểm của ba đường phân giác. Đường thẳng qua I cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại A', B' và C' sao cho A' và B' nằm ở cùng phía đối với điểm I. Chứng minh $\frac{BC}{IA'} + \frac{AC}{IB'} = \frac{AB}{IC'}$.

Bài 133: Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến và G trọng tâm. Một đường thẳng qua G cắt các đường thẳng BC, BA và AC lần lượt tại A', B' và C' sao cho A' và B' ở cùng một phía đối với G. Chứng minh $\frac{1}{GA'} + \frac{1}{GB'} = \frac{1}{GC'}$.

LUYỆN CÁCH CHỨNG MINH VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ MÊNÉLAUS

Bài 134: Cho tam giác ABC. Một cát tuyến không qua đỉnh nào của tam giác lần lượt cắt các đường thẳng BC, CA, AB (cạnh đối diện đỉnh A, B, C) tại A₁, B₁, C₁. Từ một đỉnh tùy ý của tam giác, ví dụ là A, hãy kẻ tia song song với cát tuyến và cắt đường thẳng BC tại A₂. Dùng định lý Thalès thuận, hãy cho biết các tỉ số trong biểu thức $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B}$ bằng với tỉ số (giữa những đoạn thẳng) nào trên đường thẳng BC? Từ đó chứng minh đẳng thức của định lý Ménélaus $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$.

Bài 135: Cho tam giác ABC có I là trung điểm của AC, K thuộc cạnh AB sao cho BK = 2KA. Đường thẳng IK cắt đường thẳng BC tại H. Muốn tính $\frac{HC}{HB}$, hãy chọn tam giác và cát tuyến thích hợp để viết đẳng thức Ménélaus, chứng minh đẳng thức đó rồi tính $\frac{HC}{HB}$.

Gợi ý: Tam giác cần tìm được tạo bởi hai đường thẳng đã biết tỉ số trên đó, và một đường thẳng chứa tỉ số cần tìm.

Bài 136: Cho tam giác ABC có K thuộc cạnh AB và I thuộc cạnh AC sao cho AB = 4AK; AC = 3IC. Đường thẳng IK cắt đường thẳng BC ở H. Muốn tính $\frac{BC}{HC}$, hãy chọn tam giác và cát tuyến thích hợp để viết đẳng thức Ménélaus (có chứng minh), tính các tỉ số trong đẳng thức đó rồi tính $\frac{BC}{HC}$.

Bài 137: Cho tam giác ABC có K thuộc cạnh AB sao cho AK = $\frac{3}{4}$ AB; I thuộc cạnh AC, AC = 3AI. Đường thẳng IK cắt đường thẳng BC ở H. Muốn tính $\frac{BC}{HB}$, hãy chọn tam giác và cát tuyến thích hợp để viết đẳng thức Ménélaus (không chứng minh), tính các tỉ số trong đẳng thức đó rồi tính $\frac{BC}{HB}$.

Bài 138: Cho tam giác ABC có I là trung điểm của AC. Kéo dài CB thêm một đoạn BH = $\frac{1}{2}$ BC. IH cắt AB tại K. Muốn tính $\frac{KH}{KI}$, hãy

chọn tam giác và cát tuyến thích hợp để viết đẳng thức Ménélaus, chứng minh đẳng thức đó rồi tính $\frac{KH}{KI}$.

Bài 139: Cho tam giác ABC có I thuộc cạnh AC, sao cho $AI = \frac{3}{5}AC$. Kéo dài AB thêm một đoạn $BK = \frac{1}{2}AB$. IK cắt BC tại H. Muốn tính $\frac{KH}{KI}$, hãy chọn tam giác và cát tuyến thích hợp để viết đẳng thức Ménélaus, chứng minh đẳng thức đó rồi tính $\frac{KH}{KI}$.

Bài 140: Cho tam giác ABC có I là trung điểm của AC, K thuộc cạnh AB sao cho $BK = 2KA$. Đường thẳng IK cắt đường thẳng BC tại H. Muốn tính $\frac{HI}{HK}$, hãy chọn tam giác và cát tuyến thích hợp để viết đẳng thức Ménélaus, chứng minh đẳng thức đó rồi tính $\frac{HI}{HK}$.

Bài 141: Cho tam giác ABC có I thuộc cạnh AC sao cho $AC = 3IC$. Kéo dài BC thêm một đoạn $CH = \frac{1}{5}BC$. Đường thẳng IH cắt AB ở K. Để tính $\frac{KH}{KI}$, hãy chọn tam giác và cát tuyến thích hợp để viết đẳng thức Ménélaus, chứng minh và tính các tỉ số trong đẳng thức đó rồi tính $\frac{KH}{KI}$.

Bài 142: Cho tam giác ABC có K thuộc cạnh AB sao cho $AK = \frac{3}{4}AB$; I thuộc cạnh AC, $AC = 3AI$. Đường thẳng IK cắt đường thẳng BC ở H. Muốn tính $\frac{IH}{IK}$, hãy chọn tam giác và cát tuyến thích hợp để viết đẳng thức Ménélaus (không chứng minh), tính các tỉ số trong đẳng thức đó rồi tính $\frac{IH}{IK}$.

Bài 143: Cho tam giác ABC có K thuộc cạnh AB sao cho $AK = \frac{3}{4}AB$. Kéo dài CB thêm một đoạn $BH = \frac{1}{2}BC$. KH cắt AC tại I. Muốn tính $\frac{KH}{KI}$, hãy chọn tam giác và cát tuyến thích hợp để viết đẳng thức Ménélaus, chứng minh đẳng thức đó rồi tính $\frac{KH}{KI}$.

Bài 144: Cho tam giác ABC có I thuộc cạnh AC, sao cho $AI = \frac{3}{5}AC$; H thuộc cạnh BC sao cho $BH = \frac{1}{3}BC$. IH cắt tia AB tại K. IK cắt BC tại H. Muốn tính $\frac{KH}{KI}$, hãy chọn tam giác và cát tuyến thích hợp để viết đẳng thức Ménélaus, chứng minh đẳng thức đó rồi tính $\frac{KH}{KI}$.

Bài 145: Cho tam giác ABC có $BC = 3cm$. Lấy điểm I trên cạnh AB sao cho $AB = 3AI$; điểm J trên cạnh AC sao cho $AC = 3CJ$. Đường thẳng IJ cắt tia BC ở K. Tính CK.

Bài 146: Cho tam giác ABC. Lấy điểm I trên cạnh AB sao cho $AB = 3AI$; điểm J trên cạnh AC sao cho $AC = 3CJ$. Đường thẳng IJ cắt tia BC ở K. Chứng minh J là trung điểm của IK.

Bài 147: Cho tam giác ABC có cạnh $AB = c$, $AC = b$, có đường phân giác AD cắt đường trung tuyến CM ở I. Tính các tỉ số $\frac{CD}{CB}$ và $\frac{IA}{ID}$ theo b, c.

Bài 148: Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BA lấy $BD = 2BA$. Trung tuyến AM cắt CD tại E; DM cắt AC tại F. Tính: (nên vẽ hình riêng cho mỗi câu)

1) $\frac{EM}{EA}$ 2) $\frac{EC}{ED}$ 3) $\frac{FA}{FC}$

Bài 149: Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC có M sao cho $MC = 2MB$. Trên đoạn AM có I sao cho $IA = 2IM$. BI cắt AC tại K. MK cắt AB tại D. Tính $\frac{DA}{DB}$. (Gợi ý: phải tìm một tỉ số khác rồi mới tính $\frac{DA}{DB}$).

Bài 150: Định lý Ceva: Cho tam giác ABC. Trên ba cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy ba điểm A_1, B_1, C_1 sao cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui tại điểm O. Bằng cách nhân vế theo vế hai đẳng thức của định lý Ménélaus trong tam giác AA_1B với cát tuyến COC_1 và tam giác AA_1C với cát tuyến BOB_1 , hãy chứng minh $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$.

Bài 151: Cách chứng minh khác của định lý Ceva: Cho tam giác ABC. Trên ba cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy ba điểm A_1, B_1, C_1 sao cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui tại điểm O. Qua đỉnh A vẽ đường thẳng song song với BC cắt hai tia BB_1 và CC_1 lần lượt tại B' và C' .

1) Chứng minh $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB'}{AC'}$.

2) Sử dụng câu 1) và hệ quả của định lý Thalès, hãy chứng minh $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$.

Bài 152: Cho tam giác ABC. Gọi A_1 là trung điểm của BC. Lấy điểm B_1 trên cạnh AC sao cho $AC = 3AB_1$. Lấy điểm C_1 trên cạnh AB sao cho $AB = 3AC_1$. Chứng minh AA_1 , BB_1 và CC_1 đồng qui tại một điểm. (Gợi ý: Có thể sử dụng định lý Menélaus để chứng minh BB_1 và CC_1 cùng đi qua trung điểm của AA_1 ; hoặc có thể dùng định lý Ceva).

Bài 153: Cho tam giác ABC. Kéo dài AB thêm một đoạn $BK = BA$; kéo dài BC thêm một đoạn $CH = CB$; kéo dài AC thêm một đoạn $CI = \frac{1}{3}CA$. Chứng minh H, I, K thẳng hàng.

Bài 154: Cho hình bình hành ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy các điểm G, F, H, E sao cho $AB \parallel EF \parallel CD$ và $AD \parallel GH \parallel BC$. Gọi I là giao điểm của EF và GH; K là giao điểm của AF và CG. Chứng minh D, I, K thẳng hàng. (Gợi ý: Đặt $AG = x$, $GB = y$, $BF = z$, $FC = t$. Tính $\frac{KA}{KF}$ theo x, y, z, t. DI cắt AF tại K_1 . Tính $\frac{K_1A}{K_1F}$ theo x, y, z, t, suy ra K trùng với K_1).

BÀI 7. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

I. BÀI TẬP CƠ BẢN

Trường hợp: góc - góc

Bài 1: Chứng minh tam giác ABC và tam giác DEF đồng dạng với nhau và viết tỉ số đồng dạng, nếu biết một trong các trường hợp sau:

- $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$; $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$.
- $\widehat{BAC} = \widehat{DFE}$; $\widehat{ABC} = \widehat{EDF}$.
- $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 80^\circ$, $\widehat{DEF} = 60^\circ$, $\widehat{FDE} = 80^\circ$.
- $\widehat{BAC} = 50^\circ$, $\widehat{ABC} = 70^\circ$, $\widehat{DEF} = 70^\circ$, $\widehat{FDE} = 60^\circ$.
- $\widehat{BAC} = 39^\circ$, $\widehat{ABC} = 101^\circ$, $\widehat{DFE} = 40^\circ$, $\widehat{FDE} = 39^\circ$.
- $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40^\circ$; $\widehat{DEF} = 100^\circ$; $\widehat{DFE} = 40^\circ$.
- $\frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{3} = \frac{\widehat{ACB}}{4}$; $\widehat{EDF} = 60^\circ$, $\widehat{DEF} = 40^\circ$.
- $2\widehat{BAC} = 3\widehat{ABC} = 4\widehat{ACB}$; $\frac{\widehat{EDF}}{3} = \frac{\widehat{DEF}}{4} = \frac{\widehat{DFE}}{6}$.

Bài 2: Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $DE \parallel BC$. Chứng minh rằng: tam giác ADE đồng dạng với tam giác ABC và viết tỉ số đồng dạng.

Bài 3: Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia AB lấy điểm D, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $DE \parallel BC$. Chứng minh rằng: tam giác ADE đồng dạng với tam giác ABC và viết tỉ số đồng dạng.

Bài 4: Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.

1) Chứng minh rằng: tam giác ABD đồng dạng với tam giác ACB và viết tỉ số đồng dạng.

2) Chứng minh rằng: $AB^2 = AD.AC$.

Bài 5: Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $\widehat{ACD} = \widehat{ABC}$. Chứng minh rằng: $AC^2 = AD.AB$.

Bài 6: Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$.

1) Chứng minh rằng: tam giác ADE đồng dạng với tam giác ACB và viết tỉ số đồng dạng.

2) Chứng minh $AD.AB = AE.AC$.

Bài 7: Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia AB lấy điểm D, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$.

1) Chứng minh rằng: tam giác ADE đồng dạng với tam giác ACB và viết tỉ số đồng dạng.

2) Chứng minh $AD.AB = AE.AC$.

Trường hợp: cạnh - góc - cạnh

Bài 8: Cho góc xOy. Trên tia Ox lấy các điểm A và C, trên tia Oy lấy các điểm B và D. Chứng minh rằng: tam giác AOB đồng dạng với tam giác COD nếu biết một trong các trường hợp sau:

- $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$
- $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$
- $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$
- $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}$
- $OA.OC = OB.OD$
- $OA.OD = OB.OC$
- C là trung điểm của OA, D là trung điểm của OB.
- $OA = 12\text{cm}$, $OB = 8\text{cm}$, $OC = 9\text{cm}$, $OD = 6\text{cm}$.
- $OA = 12\text{cm}$, $OB = 18\text{cm}$, $OC = 9\text{cm}$, $OD = 6\text{cm}$.
- $OA = 12\text{cm}$, $OB = 8\text{cm}$, $OC = 10\text{cm}$, $OD = 15\text{cm}$.

Bài 9: Cho góc xOy. Trên tia Ox lấy các điểm M và P, trên tia Oy lấy các điểm N và Q. Chứng minh rằng: tam giác OMN đồng dạng với tam giác OPQ và tính độ dài đoạn PQ, nếu biết một trong các trường hợp sau:

- $\frac{OM}{OP} = \frac{ON}{OQ} = \frac{2}{3}$; $MN = 3,6\text{cm}$.
- $\frac{OM}{OQ} = \frac{ON}{OP} = \frac{4}{5}$; $MN = 3,2\text{cm}$.
- $OM = 12\text{cm}$, $ON = 10\text{cm}$, $MN = 9\text{cm}$, $OP = 20\text{cm}$, $OQ = 24\text{cm}$.
- $OM = 2\text{cm}$, $ON = 1,5\text{cm}$, $MN = 1,2\text{cm}$, $OP = 4\text{cm}$, $OQ = 3\text{cm}$.

Bài 10: Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia AB lấy điểm D, trên tia đối của tia AC lấy điểm E. Chứng minh rằng: tam giác ADE đồng dạng với tam giác ABC và tính độ dài đoạn DE nếu biết một trong các trường hợp sau:

- 1) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{5}$; BC = 15cm.
- 2) $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{13}{12}$; BC = 6,5cm.
- 3) AB = 36cm, AC = 30cm, BC = 39cm, AD = 24cm, AE = 20cm.
- 4) AB = 3,2cm, AC = 2,8cm, BC = 2,4cm, AD = 3,5cm, AE = 4cm.

Bài 11: Cho góc xOy. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B và điểm C. So sánh các góc của tam giác OAB và tam giác OAC nếu biết một trong các trường hợp sau:

- 1) $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OA}$
- 2) $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OB}$
- 3) $OA^2 = OB \cdot OC$.
- 4) OA = 4cm, OB = 2cm, OC = 8cm.
- 5) OA = 6cm, OB = 4cm, OC = 9cm.
- 6) OA = $\sqrt{3}$ cm, OB = 1cm, OC = 3cm.

Bài 12: Cho hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$. Trên cạnh AD lấy điểm I. Chứng minh rằng: tam giác ABI đồng dạng với tam giác DIC và $\widehat{BIC} = 90^\circ$ nếu biết một trong các trường hợp sau:

- 1) $\frac{AB}{DI} = \frac{AI}{DC}$
- 2) AB.DC = AI.DI
- 3) AB = 6cm, CD = 12cm, AI = 8cm, DI = 9cm.
- 4) AB = 2,4cm, CD = 4,5cm, AI = 3cm, DI = 3,6cm.
- 5) AB = 10cm, AD = 10cm, CD = 18cm, AI = 12cm.

Bài 13: Cho góc xOy có tia phân giác Ot. Trên tia Ox lấy các điểm A và C' sao cho OA = 4cm, OC' = 9cm. Trên tia Oy lấy các điểm A' và C sao cho OA' = 12cm, OC = 3cm.

Trên tia Ot lấy các điểm B và B' sao cho OB = 6cm, OB' = 18cm.

- 1) Chứng minh: tam giác OAB đồng dạng với tam giác OA'B'.
- 2) Tính các tỉ số $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{BC}{B'C'}$, $\frac{AC}{A'C'}$.

Trường hợp: cạnh - cạnh - cạnh

Bài 14: Chứng minh tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF và viết các cặp góc bằng nhau, nếu biết một trong các trường hợp sau:

- 1) AB = 4cm, BC = 6cm, AC = 5cm, DE = 10cm, DF = 12cm, EF = 8cm.
- 2) AB = 24cm, BC = 21cm, AC = 27cm, DE = 28cm, DF = 36cm, EF = 32cm.
- 3) AB = DE = 12cm, AC = DF = 18cm, BC = 27cm, EF = 8cm.
- 4) $\frac{AB}{3} = \frac{BC}{4} = \frac{AC}{5} = k$, $\frac{DE}{3} = \frac{EF}{4} = \frac{DF}{5} = h$ (k, h > 0)

Bài 15: Cho tam giác ABC vuông tại A và tam giác A'B'C' vuông tại A' có BC = 10cm, AC = 8cm, B'C' = 5cm, A'C' = 4cm.

- 1) Tính AB và A'B'.
- 2) Chứng minh: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.
- 3) Chứng minh: tam giác ABC đồng dạng với tam giác A'B'C'.

Bài 16: Cho tam giác ABC vuông tại A và tam giác A'B'C' vuông tại A' có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = 2$.

- 1) Chứng minh: $\frac{AC}{A'C'} = 2$.
- 2) Chứng minh: tam giác ABC đồng dạng với tam giác A'B'C'.

II. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Trường hợp: góc - góc

Bài 17: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AD, BE, CF.

- 1) Chứng minh: tam giác ABE đồng dạng tam giác ACF và suy ra AF.AB = AE.AC.
- 2) Chứng minh: BF.BA = BD.BC.
- 3) Chứng minh: CD.CB = CE.CA.

Bài 18: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

- 1) Chứng minh: tam giác AHE đồng dạng tam giác BHD và suy ra HA.HD = HB.HE.
- 2) Chứng minh: HA.HD = HC.HF.

Bài 19: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

- 1) So sánh: \widehat{HBD} và \widehat{CAD} và chứng minh: DB.DC = DA.DH.
- 2) Chứng minh: EA.EC = EB.EH.
- 3) Chứng minh: FA.FB = FC.FH.

Bài 20: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh:

- 1) AF.AB = AH.AD = AE.AC.
- 2) BF.BA = BH.BE = BD.BC.
- 3) CE.CA = CH.CF = CD.CB.

Bài 21: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AD, BE, CF. Chứng minh: BF.BA + CE.CA = BC² và viết hai hệ thức tương tự.

Bài 22: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

Chứng minh: BH.BE + CH.CF = BC² và viết hai hệ thức tương tự.

Bài 23: Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB} = 90^\circ + \widehat{ABC}$. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh:

- 1) $\widehat{ABH} = \widehat{CAH}$. 2) $AH^2 = BH \cdot CH$.

Bài 24: Cho tam giác ABC nhọn có AA', BB', CC' là ba đường cao và O là trực tâm. Lấy B₁ thuộc đoạn thẳng OB, C₁ thuộc đoạn thẳng OC sao cho $\widehat{AB_1C} = \widehat{AC_1B} = 90^\circ$. Chứng minh:

- 1) $AB_1^2 = AC \cdot AB'$ và $AC_1^2 = AB \cdot AC'$.
2) $AC \cdot AB' = AB \cdot AC'$. 3) $AB_1 = AC_1$.

Bài 25: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Chứng minh:

- 1) $AB^2 = BH \cdot BC$ và $AC^2 = CH \cdot BC$. 2) $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Bài 26: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Chứng minh:

- 1) $AH^2 = BH \cdot CH$. 2) $AH \cdot BC = AB \cdot AC$.

Bài 27: Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và AD là đường phân giác trong.

Vẽ tia Dx cùng phía A đối với BC sao cho $\widehat{CDx} = \widehat{BAC}$, Dx cắt AC tại E.

- 1) Chứng minh: tam giác DCE đồng dạng với tam giác ACB và viết tỉ số đồng dạng.
2) Chứng minh: $DE = DB$.

Bài 28: Cho tam giác ABC có AI là đường phân giác trong. Kẻ $BD \perp AI$ tại D; $CE \perp AI$ tại E. Chứng minh:

- 1) $\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$ 2) $\frac{ID}{IE} = \frac{BD}{CE}$ 3) $\frac{AD}{AE} = \frac{ID}{IE}$

Bài 29: Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của B, C lên tia phân giác trong của góc A. Gọi I là giao điểm của CD và EB. Chứng minh:

- 1) $\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$ 2) $\frac{AD}{AE} = \frac{IB}{IE}$ 3) $AI \parallel BD$.

Bài 30: Cho tam giác ABC ($AB < AC$). E, F lần lượt là hình chiếu của B, C lên tia phân giác trong của góc A. Gọi K là giao điểm của FB và CE. Chứng minh:

- 1) $\frac{AE}{AF} = \frac{KB}{KF}$ 2) $AK \parallel BE$ và $KA \perp AE$ tại A.
3) AK là tia phân giác của góc ngoài ở đỉnh A của tam giác ABC.

Bài 31: Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$; $\widehat{B} = 2\widehat{C}$.

- 1) Vẽ đường phân giác trong BD của tam giác ABC. Chứng minh:

$$AD = \frac{4}{9} AC.$$

- 2) Chứng minh: tam giác ABD đồng dạng với tam giác ACB, viết tỉ số đồng dạng và tính AC

Bài 32: Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$; $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$.

- 1) Chứng minh: $\widehat{ACD} = \widehat{ABC}$.
2) Chứng minh: $AC^2 = AB \cdot AD$ và tính AC.

Bài 33: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Chứng minh:

- 1) $\widehat{ACD} = \widehat{ABC}$. 2) $b^2 = ac + c^2$.

Bài 34: Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD. Trên tia AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ADE} = \widehat{ABD}$. Chứng minh:

- 1) $\widehat{ADE} < \widehat{ADC}$ suy ra: E nằm giữa A và C.
2) Tam giác ABD đồng dạng với tam giác ADE.
3) $AD^2 < AB \cdot AC$.

Bài 35: Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $\widehat{ECD} = \widehat{BAD}$. Chứng minh:

- 1) $AD \cdot DE = BD \cdot CD$ 2) $AD \cdot AE = AB \cdot AC$
3) $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$.

Bài 36: Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và đường phân giác ngoài AE. Trên tia EA lấy điểm F sao cho $\widehat{ECF} = \widehat{EAB}$. Chứng minh:

- 1) $\widehat{ECF} > \widehat{ECA}$ suy ra: A nằm giữa E và F. 2) $AE \cdot EF = BE \cdot CE$
3) $AE \cdot AF = AB \cdot AC$
4) $AE^2 = BE \cdot CE - AB \cdot AC$.

Bài 37: Cho tam giác ABC có các tia phân giác góc ngoài ở đỉnh B và C cắt nhau tại K. Đường thẳng vuông góc với AK tại K cắt AB, AC theo thứ tự tại D, E.

- 1) Tia AK là gì của $\triangle DAE$.
2) Chứng minh: $\widehat{BKD} = \widehat{KCE} = \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC})$
3) Chứng minh: tam giác DBK đồng dạng với tam giác EKC.

Bài 38: Cho tam giác ABC và tam giác A'B'C' có $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$; $\widehat{ABC} + \widehat{A'B'C'} = 180^\circ$; $\widehat{ABC} > \widehat{A'B'C'}$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $\widehat{DAB} = \widehat{BAC}$.

- 1) Chứng minh: $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$.
2) Chứng minh: tam giác ABD đồng dạng với tam giác A'B'C' và $\frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'}$.
3) Chứng minh: $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Bài 39: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM với $\widehat{BAM} = \widehat{ACB}$.

Chứng minh:

1) Tam giác MAB đồng dạng với tam giác ACB.

2) $BC^2 = 2AB^2$

Bài 40: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM. Qua D thuộc BC vẽ đường thẳng song song với AM lần lượt cắt AB tại E và cắt AC tại F. Chứng minh:

1) $\frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM}$ và $\frac{DF}{AM} = \frac{CD}{CM}$

2) $\frac{DE}{AM} + \frac{DF}{AM} = 2$

3) Khi D di động trên cạnh BC thì $DE + DF$ không đổi.

Bài 41: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM. Qua D thuộc BC vẽ đường thẳng song song với AM lần lượt cắt AB tại E và cắt AC tại F.

1) Chứng minh: $DE + DF = 2AM$.

2) Qua A kẻ đường thẳng song song với BC và cắt EF ở K. Chứng minh: $DK = AM$ và $KE = KF$.

Bài 42: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM. Qua D thuộc BC vẽ đường thẳng song song với AM lần lượt cắt AB tại E và cắt AC tại F.

1) Chứng minh: khi D di động trên cạnh BC thì $DE + DF$ không đổi.

2) Qua A kẻ đường thẳng song song với BC và cắt EF ở K. Chứng minh K là trung điểm của EF.

Bài 43: Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến AM và BN. Biết rằng: $\widehat{CAM} = \widehat{CBN}$.

1) Chứng minh: tam giác CAM đồng dạng với tam giác CBN.

2) Chứng minh: $AC.CN = BC.CM$ và $AC = BC$.

Bài 44: Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến AM và BN. Biết rằng: $\widehat{CAM} = \widehat{CBN} = 30^\circ$. Kẻ $CH \perp AM$ tại H. Chứng minh:

1) $AC = BC$.

2) $CH = CM = \frac{1}{2}AC$ suy ra H trùng với M.

3) Tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 45: Cho tam giác ABC cân ở A. Lấy D thuộc cạnh AB; M thuộc cạnh BC; E thuộc cạnh CA sao cho $\widehat{DME} = \widehat{ABC}$.

1) Chứng minh: $\widehat{BDM} = \widehat{CME}$

2) Chứng minh: tam giác BDM đồng dạng với tam giác CME và viết tỉ số đồng dạng.

Bài 46: Cho tam giác ABC cân ở A có $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy D thuộc cạnh AB và E thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{ABC}$. Chứng minh:

1) $\widehat{BMD} = \widehat{MEC}$.

2) Tam giác BMD đồng dạng với tam giác CEM.

3) $BD.CE = a^2$

Bài 47: Cho tam giác ABC đều có O là trọng tâm. Vẽ đường thẳng MP \perp AB tại P, MQ \perp AC tại Q. MP cắt OB ở I; MQ cắt OC ở K; IK cắt OM ở S.

1) Chứng minh: MIOK là hình bình hành, suy ra S là trung điểm của IK.

2) Chứng minh: tam giác BIM và tam giác CKM là các tam giác cân.

3) Chứng minh: tam giác BIP đồng dạng với tam giác CKQ suy ra

$$\frac{CK}{KQ} = \frac{BI}{IP}$$

4) Chứng minh: $IK \parallel PQ$.

5) PQ cắt OM ở R. Chứng minh R là trung điểm của PQ.

Bài 48: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 4\text{cm}$, $CD = 9\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$. Gọi M là trung điểm của AD, I là giao điểm của AD và BC. Kẻ $MH \perp BC$ tại H, $BK \perp CD$ tại K.

1) Tứ giác ABKD là hình gì? Tính KC, BK, AD.

2) Tính IA, IM.

3) Chứng minh: tam giác IMH đồng dạng với tam giác BCK và tính MH.

Bài 49: Cho hình bình hành ABCD có $AC > BD$. Kẻ $CE \perp AB$ tại E, $CE \perp AD$ tại F, $BH \perp AC$ tại H, $DK \perp AC$ tại K. Chứng minh:

1) $AB.AE = AH.AC$

2) $AD.AF = AK.AC$

3) $AH + AK = AC$ và $AB.AE + AD.AF = AC^2$

Bài 50: Cho hình bình hành ABCD có $AC > BD$. Kẻ $CE \perp AB$ tại E, $CE \perp AD$ tại F, $BH \perp AC$ tại H. Chứng minh:

1) $AB.AE = AH.AC$

2) $BC.AF = HC.AC$

3) $AB.AE + AD.AF = AC^2$

Bài 51: Cho hình chữ nhật ABCD có $AD = mCD$ ($m > 0$). Lấy điểm M trên cạnh AB, tia phân giác của góc CDM cắt BC ở P. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với DP cắt đường thẳng AB tại E.

1) Chứng minh: tam giác ADE đồng dạng với tam giác DCP và $AE = mCP$.

2) Chứng minh: tam giác DME cân tại M.

3) Chứng minh: $DM = AM + mCP$.

Bài 52: Cho hình thoi ABCD có độ dài cạnh là a. Đường thẳng qua C cắt tia đối của tia BA, DA ở M và N.

1) Chứng minh: tam giác BCM đồng dạng với tam giác DNC và viết tỉ số đồng dạng.

2) Chứng minh: $BM.DN = a^2$

Bài 53: Cho tam giác ABC vuông tại A, hình vuông EFGH nội tiếp tam giác ABC sao cho $E \in AB$, $F \in AC$, $G \in BC$, $H \in BC$.

- 1) Chứng minh: $\widehat{ABC} = \widehat{GFC}$ và tam giác BHE đồng dạng với tam giác FGC.
- 2) Chứng minh: $BH \cdot GC = EH \cdot FG$.
- 3) Tính HG nếu biết $BH = 3\text{cm}$, $CG = 27\text{cm}$.

Bài 54: Tứ giác ABCD có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên AD; H, L lần lượt là hình chiếu của O lên BI, CK.

- 1) Chứng minh: tam giác BOH đồng dạng với tam giác ABI và $\frac{OH}{BI} = \frac{OB}{AB}$.
- 2) Chứng minh: tam giác COL đồng dạng với tam giác DCK và $\frac{OL}{CK} = \frac{OC}{OD}$.
- 3) Chứng minh: $\frac{OB}{AB} = \frac{OC}{OD}$ và $\frac{OH}{OL} = \frac{BI}{CK}$.

Bài 55: Tứ giác ABCD có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên AD; H, L lần lượt là hình chiếu của O lên BI, CK. Gọi M là giao điểm của CI và BK; S và R lần lượt là hình chiếu của M trên BI và CK. Chứng minh:

- 1) $\frac{OH}{OL} = \frac{BI}{CK}$.
- 2) Tam giác BMI đồng dạng với tam giác KMC và $\frac{MS}{MR} = \frac{BI}{CK}$.
- 3) $HL = SR$ và $OH = MS$.
- 4) $OM \perp HL$ và $OM \perp AD$.

Trường hợp: cạnh – góc – cạnh

Bài 56: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh:

- 1) $BD \cdot BC = BF \cdot BA$
- 2) Tam giác BDF đồng dạng với tam giác BAC và suy ra $\widehat{BDF} = \widehat{BAC}$.
- 3) $\widehat{CDE} = \widehat{BAC}$.
- 4) DH là tia phân giác của \widehat{FDE} .

Bài 57: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

- 1) Chứng minh: $AH \cdot AD = AF \cdot AB$

2) Chứng minh: tam giác ADF đồng dạng với tam giác ABH và suy ra $\widehat{HDF} = \widehat{ABH}$.

3) Chứng minh: $\widehat{ADE} = \widehat{ACH}$ và $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$.

4) Chứng minh: H là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác DEF.

Bài 58: Cho tam giác ABC cân ở A có AH và BK là hai đường cao. Biết rằng $BC = a$; $AC = b$.

- 1) Chứng minh: tam giác AHC đồng dạng với tam giác BKC.
- 2) Chứng minh: tam giác CHK đồng dạng với tam giác CAB.
- 3) Tính HK theo a và b.

Bài 59: Cho tam giác ABC cân ở A. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy D thuộc cạnh AB và E thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{ABC}$. Chứng minh:

- 1) Tam giác BMD đồng dạng với tam giác CEM.
- 2) $\frac{MD}{BD} = \frac{ME}{MB}$.
- 3) Tam giác BDM và tam giác MDE đồng dạng với nhau.
- 4) DM là tia phân giác của \widehat{BDE} .

Bài 60: Cho tam giác ABC cân ở A. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy K thuộc cạnh AB và I thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{KMI} = \widehat{ABC}$. Chứng minh:

- 1) Tam giác BMK đồng dạng với tam giác CIM.
- 2) Tam giác BMK đồng dạng với tam giác MIK.
- 3) Tam giác CIM đồng dạng với tam giác MIK.
- 4) KM là tia phân giác của \widehat{BKI} và IM là tia phân giác của \widehat{CIK} .

Bài 61: Cho tam giác ABC đều độ dài cạnh là 2a. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy D thuộc cạnh AB và E thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{DME} = 60^\circ$. Kẻ $MH \perp BC$ tại H, $MK \perp AC$ tại K, $MI \perp DE$ tại I.

- 1) Tính AH, AK.
- 2) Chứng minh: DM là tia phân giác của \widehat{BDE} và EM là tia phân giác của \widehat{CED} .
- 3) Chứng minh: $DI = DH$ và $EI = EK$.
- 4) Tính chu vi tam giác ADE.

Bài 62: Cho tam giác ABC cân ở A và H là trung điểm của BC. Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên AC và O là trung điểm của HI. Chứng minh:

- 1) $\widehat{AHO} = \widehat{BCI}$.
- 2) $AH \cdot IC = HI \cdot HC = HO \cdot BC$.
- 3) Tam giác AHO đồng dạng với tam giác BCI.
- 4) $AO \perp BI$.

Bài 63: Cho tam giác ABC có hai đường cao BB', CC' cắt nhau tại H. Các đường thẳng vuông góc với AB, AC tại A cắt BB', CC' theo thứ tự tại M, N. MN cắt AH ở D. Kẻ trung tuyến AI của tam giác ABC.

- 1) Chứng minh: tứ giác AMHN là hình bình hành.
- 2) Chứng minh: tam giác AMH đồng dạng với tam giác BAC.
- 3) Chứng minh: tam giác AMD đồng dạng với tam giác ABI.
- 4) Gọi K là giao điểm của AI và MN. Chứng minh: $AI \perp MN$.

Bài 64: Cho tam giác ABC. Lấy D thuộc cạnh BC; E thuộc cạnh AC. AD cắt BE ở O. Cho biết $AO = 36\text{cm}$, $DO = 9\text{cm}$, $BO = EO = 18\text{cm}$, $BD = 12\text{cm}$. Đặt $CD = x$, $CE = y$.

- 1) Chứng minh: tam giác AOE đồng dạng với tam giác BOD và tính AE.
- 2) Chứng minh: tam giác ACD đồng dạng với tam giác BCE và $\frac{y+24}{x+12} = \frac{x}{y} = \frac{5}{4}$.
- 3) Tính x và y rồi suy ra độ dài AC, BC.

Bài 65: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB = 4\text{cm}$, $CD = 9\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$. Gọi M là trung điểm của AD. Kẻ $BK \perp CD$ tại K.

- 1) Tứ giác ABKD là hình gì? Tính KC, BK, AD, AM, DM.
- 2) Chứng minh: tam giác ABM đồng dạng với tam giác DMC.
- 3) Tính BMC.

Bài 66: Cho hình thoi ABCD có độ dài cạnh là a và $\hat{A} = 60^\circ$. Đường thẳng qua C cắt tia đối của tia BA, DA ở M và N.

- 1) Chứng minh: tam giác BCM đồng dạng với tam giác DNC và viết tỉ số đồng dạng.
- 2) Chứng minh: $BD = a$ và $BM \cdot DN = BD^2$.
- 3) Chứng minh: tam giác BDM đồng dạng với tam giác DBM.
- 4) Gọi K là giao điểm của BN và DM. Chứng minh: $\hat{BKD} = 120^\circ$.

Bài 67: Cho hình vuông ABCD. Lấy P trên cạnh AB, Q trên cạnh BC sao cho $BP = BQ$. Gọi H là hình chiếu của B lên CP.

- 1) Chứng minh: tam giác HBC đồng dạng với tam giác BPC và viết tỉ số đồng dạng.
- 2) Chứng minh: $\frac{CH}{CD} = \frac{BH}{BQ}$ và so sánh DCH và QBH.
- 3) Chứng minh: tam giác CHD đồng dạng với tam giác BHQ và tính số đo DHQ.

Bài 68: Cho hình vuông ABCD. M là một điểm bất kỳ thuộc cạnh BC. AM cắt DC tại P, DM cắt AB tại Q, BP cắt CQ tại I. Chứng minh:

- 1) $\frac{CP}{AB} = \frac{CM}{BM}$ và $\frac{CD}{BQ} = \frac{CM}{BM}$.
- 2) $\frac{CP}{BC} = \frac{BC}{BQ}$ và tam giác CBP đồng dạng với tam giác BCQ.
- 3) $BP \perp CQ$.

Bài 69: Cho hình vuông ABCD. M là một điểm bất kỳ trên cạnh BC (M không trùng B, C). AM cắt CD tại E, DM cắt BE tại F, DM cắt AB tại G, CF cắt BG tại H.

- 1) So sánh $\frac{BH}{CE}$ và $\frac{HG}{CD}$. Từ đó chứng minh: $\frac{BH}{CE} = \frac{BG}{DE}$.
- 2) So sánh: $\frac{BG}{CD}$ và $\frac{AB}{CE}$.
- 3) Chứng minh: $BH \cdot DE = AB \cdot CD = BC \cdot AD$.
- 4) Chứng minh: tam giác BHC đồng dạng với tam giác DEA và $CF \perp ME$.

Bài 70: Cho tứ giác ABCD có $\hat{CAD} = \hat{CBD}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh:

- 1) Tam giác AOD đồng dạng với tam giác BOC.
- 2) $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$.
- 3) Tam giác AOB đồng dạng với tam giác DOC.

Bài 71: Cho tứ giác ABCD có $\hat{CAD} = \hat{CBD}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh:

- 1) $\hat{ADB} = \hat{ACB}$
- 2) $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.
- 3) $\hat{BAC} = \hat{BDC}$; $\hat{ABD} = \hat{ACD}$.
- 4) $\hat{BAD} + \hat{BCD} = 180^\circ$ và $\hat{ABC} + \hat{ADC} = 180^\circ$.

Bài 72: Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Cho biết: $OA \cdot OC = OB \cdot OD$

- 1) Chứng minh: $\hat{CAD} = \hat{CBD}$; $\hat{ADB} = \hat{ACB}$.
- 2) Chứng minh: $\hat{BAC} = \hat{BDC}$; $\hat{ABD} = \hat{ACD}$.
- 3) Chứng minh: $\hat{BAD} + \hat{BCD} = 180^\circ$ và $\hat{ABC} + \hat{ADC} = 180^\circ$.

Bài 73: Cho tứ giác ABCD có $\hat{ADB} = \hat{ACB}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trên đường chéo BD lấy điểm M sao cho: $\hat{MAD} = \hat{BAC}$.

- 1) Chứng minh: tam giác AOB đồng dạng với tam giác DOC.
- 2) Chứng minh: tam giác ADM đồng dạng với tam giác ACB và $AD \cdot BC = AC \cdot DM$.
- 3) Chứng minh: tam giác ABM đồng dạng với tam giác ACD và $AB \cdot CD = AC \cdot BM$.
- 4) Chứng minh: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Bài 74: Cho tứ giác ABCD có $OA \cdot OC = OB \cdot OD$ với O là giao điểm của AC và BD. Trên đường chéo AC lấy điểm E sao cho: $\hat{ABE} = \hat{CBD}$.

- 1) Chứng minh: tam giác AOB đồng dạng với tam giác DOC và tam giác AOD đồng dạng với tam giác BOC.
- 2) Chứng minh: tam giác ABE đồng dạng với tam giác DCB và $AB \cdot CD = AE \cdot BD$.

- 3) Chứng minh: tam giác EBC đồng dạng với tam giác ABD và $AD \cdot BC = EC \cdot BD$.
 4) Chứng minh: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Bài 75: Cho tứ giác ABCD. Lấy điểm M nằm trong \widehat{ABC} sao cho $\widehat{MBC} = \widehat{ABD}$ và $\widehat{MCB} = \widehat{ADB}$.

- 1) Chứng minh: tam giác BMC đồng dạng với tam giác BAD và viết các tỉ số đồng dạng.

- 2) Chứng minh: $AD \cdot BC = MC \cdot BD$ và $\frac{AB}{BD} = \frac{BM}{BC}$

- 3) Chứng minh: tam giác ABM đồng dạng với tam giác CBD và $AB \cdot CD = AM \cdot BD$

- 4) Chứng minh: $AM + MC \geq AC$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

- 5) Chứng minh: $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Trường hợp: cạnh - cạnh - cạnh

Bài 76: Cho góc nhọn xOy có tia phân giác Ot. Trên tia Ox lấy các điểm A và C' sao cho OA = 24cm, OC' = 18cm. Trên tia Oy lấy các điểm A' và C sao cho OA' = 16cm, OC = 27cm. Trên tia Ot lấy các điểm B và B' sao cho OB = 21cm, OB' = 14cm.

- 1) Tính các tỉ số $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{BC}{B'C'}$, $\frac{AC}{A'C'}$.

- 2) Chứng minh: tam giác ABC đồng dạng với tam giác A'B'C'.

Bài 77: Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c và $a^2 = bc$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC.

- 1) Chứng minh: $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$.

- 2) Chứng minh: $\frac{h_a}{a} = \frac{h_b}{b} = \frac{h_c}{c}$.

- 3) Chứng minh: tam giác ABC đồng dạng với tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài các đường cao của tam giác ABC.

Trường hợp: cạnh huyền cạnh góc vuông - tỉ số đồng dạng

Bài 78: Cho tam giác ABC vuông tại A và tam giác A'B'C' vuông tại A' có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ ($k > 0$).

- 1) Chứng minh: $\frac{AC}{A'C'} = k$.

- 2) Chứng minh: tam giác ABC đồng dạng với tam giác A'B'C'.

Bài 79: Cho tam giác ABC và tam giác A'B'C' là hai tam giác nhọn có các đường cao lần lượt là AH, A'H'. Biết rằng: $\frac{AH}{AB} = \frac{A'H'}{A'B'}$ và

$$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$$

- 1) Chứng minh: tam giác ABH đồng dạng với tam giác A'B'H'.

- 2) Chứng minh: tam giác ABC đồng dạng với tam giác A'B'C'.

Bài 80: Cho tam giác ABC vuông tại A và tam giác A'B'C' vuông tại A' có các đường cao lần lượt là AH, A'H'. Biết rằng: $\frac{AH}{AB} = \frac{A'H'}{A'B'}$. Chứng minh:

- 1) Tam giác ABH đồng dạng với tam giác A'B'H'.

- 2) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác A'B'C'.

Bài 81: Cho hai tam giác nhọn ABC và A'B'C' có các đường cao lần lượt là AH, A'H'. Biết rằng: $\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$.

- 1) Chứng minh: tam giác ABH đồng dạng với tam giác A'B'H' và tam giác ACH đồng dạng với tam giác A'C'H'.

- 2) Chứng minh: tam giác ABC đồng dạng với tam giác A'B'C' và

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

- 3) Chứng minh: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}$

Bài 82: Tam giác ABH vuông tại H có: AB = 20cm, BH = 12cm. Trên tia đối của tia HB lấy điểm C sao cho $AC = \frac{5}{3}AH$. Chứng minh:

- 1) Tam giác ABH đồng dạng với tam giác CAH.

- 2) $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

Bài 83: Cho tứ giác ABCD có $\widehat{BAD} = 90^\circ, \widehat{CBD} = 90^\circ$, AB = 4cm, BD = 6cm và CD = 9cm. Chứng minh:

- 1) Tam giác ABD đồng dạng với tam giác BDC.

- 2) Tứ giác ABCD là hình thang vuông.

Bài 84: Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF. Kẻ các đường cao AH và DK.

- 1) Chứng minh: tam giác ABH đồng dạng với tam giác DEK.

- 2) Chứng minh: $\frac{AH}{DK} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Từ đó rút ra nhận xét gì?

- 3) Chứng minh: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$. Từ đó rút ra nhận xét gì?

Bài 85: Cho tam giác ABC và tam giác DEF có $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$ ($k > 0$). Kẻ các đường cao AH và DK.

- 1) Chứng minh: tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF.

- 2) Chứng minh: tam giác ABH đồng dạng với tam giác DEK.

- 3) Chứng minh: $\frac{AH}{DK} = k$. Từ đó rút ra nhận xét gì?

4) Chứng minh: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = k^2$. Từ đó rút ra nhận xét gì?

Bài 86: Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF. Kẻ các đường trung tuyến AM và DN. Chứng minh:

1) $\frac{BM}{EN} = \frac{AB}{DE}$

2) Tam giác ABM đồng dạng với tam giác DEN và $\frac{AM}{DN} = \frac{AB}{DE}$.

Bài 87: Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF. Kẻ các đường phân giác trong AI và DK. Chứng minh:

1) Tam giác ABI đồng dạng với tam giác DEK.

2) $\frac{AI}{DK} = \frac{AB}{DE}$.

Bài 88: Cho tam giác ABC và tam giác DEF có $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$

($k > 0$). Kẻ các đường trung tuyến AM, DN và các đường phân giác trong AI, DK.

1) Chứng minh: tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF.

2) Chứng minh: $\frac{AM}{DN} = \frac{AI}{DK} = k$. Từ đó rút ra nhận xét gì?

Bài 89: Một đường thẳng song song với cạnh BC của tam giác ABC cắt hai cạnh AB, AC ở D và E. Cho biết $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$.

1) Chứng minh: tam giác ADE đồng dạng với tam giác ABC.

2) Tính tỉ số $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$.

Bài 90: Cho tam giác ABC có D là trung điểm của AB, E là trung điểm của AC.

1) Chứng minh: tam giác ADE đồng dạng với tam giác ABC.

2) Tính tỉ số $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$.

Bài 91: Cho tam giác ABC có D thuộc cạnh AB, E thuộc cạnh AC sao cho $DE \parallel BC$. Cho biết $S_{\triangle ADE} = 9 \text{ (cm}^2\text{)}$, $S_{\triangle ABC} = 16 \text{ (cm}^2\text{)}$.

1) Chứng minh: tam giác ADE đồng dạng với tam giác ABC.

2) Tính $\frac{AD}{AB}, \frac{AE}{AC}, \frac{DE}{BC}$.

Bài 92: Cho tam giác ABC và M là một điểm tùy ý trên cạnh BC. Kẻ $MD \parallel AC$ ($D \in AB$), $ME \parallel AB$ ($E \in AC$). Cho biết $S_{\triangle BMD} = a^2$, $S_{\triangle MCE} = b^2$.

1) Chứng minh: tam giác BMD đồng dạng với tam giác MCE.

2) Tính: $\frac{BM}{MC}, \frac{BM}{BC}$ theo a và b.

3) Tính: $S_{\triangle ABC}, S_{\triangle DME}$ theo a và b.

Bài 93: Một đường thẳng song song với cạnh BC của tam giác ABC cắt AB, AC ở D, E. Trên cạnh BC lấy điểm G. Cho biết $S_{\triangle ADE} = 9 \text{ (cm}^2\text{)}$, $S_{\triangle ABC} = 16 \text{ (cm}^2\text{)}$.

1) Chứng minh: tam giác ADE đồng dạng với tam giác ABC và tính $\frac{DE}{BC}$.

2) Tính $\frac{S_{\triangle DEG}}{S_{\triangle BCD}}$.

3) Tính $S_{\triangle DGE}$.

Bài 94: Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G. Trên các đoạn AD, BE, CF lần lượt lấy A_1, B_1, C_1 với $\frac{AA_1}{AD} = \frac{BB_1}{BE} = \frac{CC_1}{CF} = \frac{1}{3}$.

1) Chứng minh: A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của AG, BG, CG.

2) Chứng minh: tam giác $A_1B_1C_1$ đồng dạng với tam giác ABC.

3) Tính $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}$.

Bài 95: Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G. Trên các đoạn AD, BE, CF lần lượt lấy A_1, B_1, C_1 với $\frac{AA_1}{AD} = \frac{BB_1}{BE} = \frac{CC_1}{CF} = \frac{1}{3}$. Tính $S_{\triangle A_1B_1C_1}$ nếu biết $S_{\triangle ABC} = 128 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 96: Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AD, BE, CF và trọng tâm G. Gọi M là trung điểm của BG. Đặt $S_{\triangle ABC} = S$.

1) Chứng minh: $\frac{GD}{AD} = \frac{GM}{BE} = \frac{MD}{CF} = \frac{1}{3}$.

2) Tính các diện tích $S_{\triangle ABD}, S_{\triangle BDC}, S_{\triangle GDM}$ theo S.

Bài 97: Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AD, BE, CF và trọng tâm G. Gọi M là trung điểm của BG. Đặt S_1 là diện tích của một tam giác có độ dài ba cạnh theo thứ tự bằng AD, BE, CF và S là diện tích tam giác ABC.

1) Chứng minh: $\frac{GD}{AD} = \frac{GM}{BE} = \frac{MD}{CF} = \frac{1}{3}$.

2) Chứng minh: $S_1 = 9S_{\triangle GDM}$.

3) Tính $S_{\triangle GDM}$ theo S.

4) Chứng minh: $S_1 = \frac{3}{4}S$.

Bài 98: Cho điểm D ở miền trong tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của tam giác ADB, tam giác ADC, tam giác BDC và E, F,

G. lần lượt là trung điểm của AD, BD, CD.

1) Tính tỉ số $\frac{MN}{FG} \cdot \frac{FG}{BC} \cdot \frac{MN}{BC}$.

2) Chứng minh: tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC.

3) Tính tỉ số $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}}$.

Bài 99: Cho hình thang ABCD (AB // CD). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết rằng

AB = 6cm, CD = 8cm.

1) Chứng minh: tam giác AOB đồng dạng với tam giác COD.

2) Tính $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle COD}}$.

Bài 100: Hình thang ABCD có đáy AB = a; CD = b. Hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với AB tại H và cắt CD tại K.

1) Tính $\frac{OH}{OK} \cdot \frac{OH}{HK}$ theo a và b. 2) Tính $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABD}}; \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABCD}}$.

3) Tính $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABCD}}$.

Bài 101: Tứ giác ABCD có diện tích bằng 30 (cm²), tam giác ABC có diện tích bằng 10 (cm²). Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt DA, DC ở M, N. Kẻ DH ⊥ MN tại H, BI ⊥ AC tại I. Gọi K là giao điểm DH với AC.

1) Tính các tỉ số $\frac{BI}{DK}; \frac{DK}{DH}$.

2) Tính tỉ số $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle DMN}}$ và suy ra diện tích tam giác DMN.

III. BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 102: Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB} = 90^\circ + \widehat{ABC}$. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh: $AH^2 = BH \cdot CH$.

Bài 103: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh: H là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác DEF.

Bài 104: Cho tam giác ABC cân ở A có AH và BK là hai đường cao. Biết rằng BC = a; AC = b.

Tính HK theo a và b.

Bài 105: Cho tam giác ABC nhọn có AD, BE, CF là ba đường cao và H là trực tâm. Lấy B₁ thuộc đoạn thẳng HB, C₁ thuộc đoạn thẳng HC sao cho AB₁C = AC₁B = 90°. Chứng minh: AB₁ = AC₁.

Bài 106: Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c và a² = bc. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh: tam giác ABC đồng dạng với tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài các đường cao của tam giác ABC.

Bài 107: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Chứng minh:

1) $AB^2 = BH \cdot BC$ và $AC^2 = CH \cdot BC$.

2) $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

3) $AH^2 = BH \cdot CH$.

4) $AH \cdot BC = AB \cdot AC$.

5) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

Bài 108: Cho tam giác ABC có AB < AC và AD là đường phân giác trong. Vẽ tia Dx cùng phía A đối với BC sao cho $\widehat{CDx} = \widehat{BAC}$, Dx cắt AC tại E. Chứng minh: DE = DB.

Bài 109: Cho tam giác ABC có AI là đường phân giác trong. Kẻ BD ⊥ AI tại D; CE ⊥ AI tại E.

Chứng minh: $\frac{AD}{AE} = \frac{ID}{IE}$.

Bài 110: Cho tam giác ABC (AB < AC). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, C lên tia phân giác trong của góc A. Gọi K là giao điểm của FB và CE. Chứng minh: AK là tia phân giác của góc ngoài ở đỉnh A của tam giác ABC.

Bài 111: Cho tam giác ABC có AB = 9cm; BC = 16cm; $\hat{B} = 2\hat{C}$. Tính AC.

Bài 112: Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c và $\hat{B} = 2\hat{C}$. Chứng minh: $b^2 = ac + c^2$.

Bài 113: Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác. Chứng minh: $AD^2 < AB \cdot AC$.

Bài 114: Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD. Chứng minh: $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$.

Bài 115: Cho tam giác ABC có AB < AC và đường phân giác ngoài AE. Chứng minh: $AE^2 = BE \cdot CE - AB \cdot AC$.

Bài 116: Cho tam giác ABC có các tia phân giác góc ngoài ở đỉnh B và C cắt nhau tại K. Đường thẳng vuông góc với AK tại K cắt AB, AC theo thứ tự tại D, E. Chứng minh: tam giác DBK đồng dạng với tam giác EKC.

Bài 117: Cho tam giác ABC và tam giác A'B'C' có $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$; $\widehat{ABC} + \widehat{A'BC'} = 180^\circ$; $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$; $\widehat{ABC} + \widehat{A'B'C'} = 180^\circ$; $\widehat{ABC} < \widehat{A'B'C'}$.

Chứng minh: $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Bài 118: Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến AM và BN. Biết rằng: $\widehat{CAM} = \widehat{CBN} = 30^\circ$. Chứng minh: tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 119: Cho tam giác ABC cân ở A và H là trung điểm của BC. Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên AC và O là trung điểm của HI. Chứng minh: $AO \perp BI$

Bài 120: Cho tam giác ABC có hai đường cao BB', CC' cắt nhau tại H. Các đường thẳng vuông góc với AB, AC tại A cắt BB', CC' theo thứ tự tại M, N. Kẻ trung tuyến AI của tam giác ABC. Chứng minh: $AI \perp MN$.

Bài 121: Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AD, BE, CF và trọng tâm G. Đặt S_1 là diện tích của một tam giác có độ dài ba cạnh theo thứ tự bằng AD, BE, CF và S là diện tích tam giác ABC. Chứng minh: $S_1 = \frac{3}{4}S$.

Bài 122: Cho điểm D ở miền trong tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của tam giác ADB, tam giác ADC, tam giác BDC.

1) Chứng minh: $MP \parallel AC$. 2) So sánh: $S_{\triangle MNP}$ với $S_{\triangle ABC}$.

Bài 123: Cho tam giác ABC. Lấy D thuộc cạnh BC; E thuộc cạnh AC. AD cắt BE ở O. Cho biết $AO = 36\text{cm}$, $DO = 9\text{cm}$, $BO = EO = 18\text{cm}$, $BD = 12\text{cm}$. Tính độ dài AC, BC.

Bài 124: Cho tam giác ABC cân ở A có $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy D thuộc cạnh AB và E thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{ABC}$.

1) Chứng minh: BD, CE không đổi.

2) Chứng minh: DM là tia phân giác của \widehat{BDE} .

3) Nếu tam giác ABC đều cạnh bằng $2a$. Tính chu vi của tam giác ADE.

Bài 125: Cho tam giác ABC đều có O là trọng tâm. Gọi M thuộc BC vẽ $MP \perp AB$ tại P, $MQ \perp AC$ tại Q. MP cắt OB ở I; MQ cắt OC ở K.

1) Chứng minh: MIOK là hình bình hành.

2) PQ cắt OM ở R. Chứng minh R là trung điểm của PQ.

Bài 126: Cho hình bình hành ABCD có $AC > BD$. Kẻ $CE \perp AB$ tại E, $CF \perp AD$ tại F. Chứng minh: $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$

Bài 127: Cho hình chữ nhật ABCD có $AD = mCD$ ($m > 0$). Lấy điểm M trên cạnh AB, tia phân giác của góc CDM cắt BC ở P. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với DP cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh: $DM = AM + mCP$.

Bài 128: Cho hình thoi ABCD có độ dài cạnh là a và $\widehat{A} = 60^\circ$. Đường thẳng qua C cắt tia đối của tia BA, DA ở M và N. Gọi K là giao điểm của BN và DM.

1) Chứng minh: BM, DN không đổi.

2) Chứng minh: $\widehat{BKD} = 120^\circ$.

Bài 129: Cho tam giác ABC vuông tại A, hình vuông EFGH nội tiếp tam giác ABC sao cho $E \in AB$, $F \in AC$, $G \in BC$, $H \in BC$. Tính EF nếu biết $BH = 2\text{cm}$, $CG = 8\text{cm}$.

Bài 130: Cho hình vuông ABCD. Lấy P trên cạnh AB, Q trên cạnh BC sao cho $BP = BQ$. Gọi H là hình chiếu của B lên CP. Tính số đo \widehat{DHQ} .

Bài 131: Cho hình vuông ABCD. M là một điểm bất kỳ thuộc cạnh BC. AM cắt DC tại P, DM cắt AB tại Q. Chứng minh: $BP \perp CQ$.

Bài 132: Cho hình vuông ABCD. M là một điểm bất kỳ trên cạnh BC (M không trùng B, C). AM cắt CD tại E, DM cắt BE tại F, DM cắt AB tại G, CF cắt BG tại H. Chứng minh: $CF \perp ME$.

Bài 133: Tứ giác ABCD có diện tích bằng $36(\text{cm})^2$, tam giác ABC có diện tích bằng $11(\text{cm})^2$. Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt DA, DC ở M, N. Tính diện tích tam giác DMN.

Bài 134: Cho tứ giác ABCD có $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$. Chứng minh: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Bài 135: Cho tứ giác ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo và $OA \cdot OC = OB \cdot OD$ với O là giao điểm. Chứng minh: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Bài 136: Cho tứ giác ABCD. Chứng minh: $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Bài 137: Tứ giác ABCD có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên AD; AC cắt BD ở O, CI cắt BK ở M.

1) Chứng minh: tỉ số khoảng cách từ O đến BI, CK bằng $\frac{BI}{CK}$.

2) Chứng minh: $OM \perp AD$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM HỌC KÌ I

ĐẠI SỐ

Bài 1: $(2x + 1)(1 - 2x) = ?$

a. $2x^2 - 1$ b. $4x^2 - 1$ c. $1 - 4x^2$ d. $1 - 4x$

Bài 2: Tìm x biết: $3x^2 - 3(x + 2)(x - 2) = 12x$. Giá trị của x là:

a. 1 b. -1 c. 0 hoặc 1 d. $\frac{1}{2}$

Bài 3: Cho đa thức $A = (2a - b)^3 - (a - b)^3 - a^2(7a - 15b)$. Đa thức A sau khi thu gọn bằng:

a. $-30a^2b + 3ab^2 + 3ab^2$ b. $6a^2b + 3ab^2$
c. $3ab^2$ d. $3a^2b$

Bài 4: $(x + y)^3 = ?$

- a. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
c. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

- b. $x^3 + y^3$
d. Cả a, b và c đều sai.

Bài 5: Tính $(3x - 4y)^2$

- a. $(3x + 4y)(3x - 4y)$
c. $9x^2 + 16y^2 + 24xy$

- b. $9x^2 + 16y^2$
d. Cả a, b và c đều sai

Bài 6: Kết quả của tích $3x(5 - x)$ là

- a. $15 - 6x$ b. $15x - 3x^2$ c. $15x + 6x$ d. $15x + 3x^2$

Bài 7: Chọn kết quả đúng của phép chia $36x^4y^3 : 4xy^2$

- a. $-25 - x^2$
c. $x^2 - 25$

- b. $25 - x^2$
d. Cả a, b và c đều sai

Bài 8: Đẳng thức nào đúng?

- a. $(x - 2)^2 = 4 - 4x + x^2$
c. $(x - 2)^2 = -(2 - x)^2$

- b. $(x - 2)^2 = x^2 - 2x + 4$
d. $(x - 2)^2 = x^2 + 4x - 4$

Bài 9: Đẳng thức nào đúng?

- a. $2 - x^2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
c. $2 - x^2 = (\sqrt{2} - x)^2$

- b. $2 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$
d. $2 - x^2 = (x + \sqrt{2})(\sqrt{2} - x)$

Bài 10: Phân thức $\frac{2-x}{x-2}$ bằng với phân thức nào sau đây:

- a. $\frac{x-2}{x-2}$ b. $\frac{2-x}{2-x}$ c. $\frac{2}{2}$ d. -1

Bài 11: Cho $\frac{A}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$ (A là đa thức). A bằng với đa thức nào sau đây:

- a. x b. $(x^2 - 1)(x + 1)$ c. $x - 1$ d. $x + 1$

Bài 12: Đẳng thức nào đúng?

- a. $(x - 2)^2 = -(x - 2)^2$
c. $(x - 2)^2 = -(2 - x)^2$

- b. $(x - 2)^2 = -(x + 2)^2$
d. $(x - 2)^2 = (2 - x)^2$

Bài 13: Đẳng thức nào sai?

- a. $2 - x^2 = -x^2 + 2$
c. $2 - x^2 = (2 - x)^2$

- b. $(x + 3)^2 = (-x - 3)^2$
d. $2 - x^2 = (x + \sqrt{2})(\sqrt{2} - x)$

Bài 14: Đa thức $A = (x^2 - 2y^2)(x^2 + 2y^2) - x^2(x^2 - 2y^2)$. Sau khi thu gọn

- có dạng:
a. 0 b. $4y^2 + 2x^2$ c. $-2x^2y^2 - 4y^4$ d. $2x^2y^2 - 4y^4$

Bài 15: Giá trị của đa thức $B = x^2 + y^2$ biết $x + y = 9$ và $x - y = 5$ là:

- a. 28 b. 53 c. 106 d. 56

Bài 16: Tìm x biết: $x^2(3 - x) + (x - 1)^3 = 0$. Giá trị của x tìm được là:

- a. 1 b. $\frac{1}{3}$ c. $-\frac{1}{3}$ d. a, b, c đều sai

Bài 17: Cho biểu thức $A = [2(x - y)^3 - y(x - y)^2 - x(x - y)^2] : (x - y)^2$

Khi đó

- a. $A = 2 - y - x$ b. $A = 2(x - y) - y + x$
c. $A = x - 3y$ d. b, c đều đúng.

Bài 18: Mẫu thức chung của các phân thức: $\frac{2}{x-2}$; $\frac{3}{4-x^2}$; $\frac{4}{x^2+4x+4}$ là:

- a. $(x + 2)(x - 2)^2$ b. $(x - 2)(x + 2)$
c. $(x - 2)(x + 2)^2$ d. b, c đều đúng.

Bài 19: Cho $M = \frac{2x}{x^2-2x+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}$. Khi đó M bằng:

- a. $\frac{x}{2}$ b. $-\frac{x}{2}$ c. $\frac{2}{x}$ d. $-\frac{2}{x}$

Bài 20: Phân thức $\frac{1-x^2}{x-1}$ bằng với phân thức nào sau đây:

- a. $\frac{-x-1}{1}$ b. $\frac{1-x}{1}$ c. $\frac{x+1}{1}$ d. $-x$

Bài 21: Cho $A = \frac{x-1}{x+1}$ giá trị của A bằng 0 khi:

- a. $x = -1$ b. $x = 0$ c. $x = 1$ d. $x = 2$

Bài 22: Đơn thức thích hợp điền vào ô trống để được đẳng thức đúng:

$$4x^2 - 4xy + \dots = (2x - y)^2$$

- a. 1 b. $4y^2$ c. y^2 d. 4

Bài 23: Tính $(2x + 3y)(2x - 3y)$?

- a. $4x^2 - 9y^2$ b. $4x^2 + 9y^2$ c. $2x^2 - 3y^2$ d. $4x - 9y$

Bài 24: Chọn câu đúng: $4x^2 - 9 = ?$

- a. $(4x - 9)(4x + 9)$ b. $(2x - 3)(2x + 3)$
c. $(2x - 3)^2$ d. $(4x + 3)(4x - 3)$

Bài 25: Mẫu thức chung của hai phân thức $\frac{2}{(1-x)^2}$ và $\frac{1}{3x(x-1)}$ là:

- a. $3x(x-1)^2$ b. $(1-x)^2$
c. $3x(1-x)$ d. $3(x-1)(1-x)^2$

Bài 26: Tính $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$:

- a. $2x^3 + 27$ b. $8x^3 - 27$ c. $8x^3 + 28$ d. $(2x^2 + 3)^2$

Bài 27: Phân thức nào bằng phân thức $\frac{x^2 - 4}{xy + 2y}$?

- a. $\frac{x^2 - 4}{xy - 2y}$ b. $\frac{(x-2)^2}{x(y-2)}$ c. $\frac{x-2}{y}$ d. $\frac{y}{x-2}$

Bài 28: Tính $(3x - 2)^2$ được kết quả là:

- a. $9x^2 - 4$ b. $9x^2 + 4$ c. $9x^2 - 12x + 4$ d. $9x^2 + 12x + 4$

Bài 29: Biểu thức thích hợp phải điền vào chỗ trống (.....) của $(2x - 3)(.....) = 8a^3 - 27$ là:

- a. $4a^2 - 6a + 9$ b. $4a^2 + 6a + 9$
c. $4a^2 + 12a + 9$ d. $4a^2 - 12a + 9$

Bài 30: Thương của phép chia đa thức $14x^3y^2 - 21x^3y^3$ cho đơn thức $7x^3y^2$ là:

- a. $2 - 3y$ b. $2x - 3y$ c. $2x - 3$ d. $2 + 3y$

Bài 31: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD), biết số đo $\hat{A} = 125^\circ$. Số đo \hat{C} là:

- a. 45° b. 55° c. 65° d. 125°

Bài 32: Chọn câu sai: $(x - y)^2 = ?$

- a. $x^2 - 2xy + y^2$ b. $y^2 - 2xy + x^2$
c. $(x - y)(x - y)$ d. $x^2 - y^2$

Bài 33: Chọn câu đúng: Chia đa thức $(x^3 - y^3)$ cho đa thức $(x - y)$ được thương là:

- a. $x^2 - 2xy + y^2$ b. $x^2 + xy + y^2$
c. $x^2 - xy + y^2$ d. $x^2 + y^2$

Bài 34: Chọn câu sai: $x^2 + y^2 = ?$

- a. $(x + y)^2$ b. $(x - y)^2 + 2xy$ c. $y^2 + x^2$ d. $(x + y)^2 - 2xy$

Bài 35: Chọn câu sai: $2006^2 - 2003^2$ chia hết cho:

- a. 3 b. 4009
c. 3 và 4009 d. a, b, c đều sai.

Bài 36: $(x - 2)^3 : (2 - x)^2 = ?$

- a. $2 - x$ b. $x - 2$
c. $-(x - 2)$ d. a, b và c đều sai

HÌNH HỌC

Bài 1: Đánh dấu đúng (Đ) sai (S) vào ô thích hợp:

- a. Tứ giác có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân
b. Hình bình hành có các cặp góc đối bằng nhau
c. Hình thang có 2 góc bằng nhau là hình thang cân
d. Tứ giác có 2 cạnh đối bằng nhau là hình bình hành

Chọn câu đúng:

- a. Hình bình hành có 4 góc bằng nhau.
b. Hình bình hành có 2 đường chéo bằng nhau
c. Hình chữ nhật có 4 cạnh bằng nhau.
d. Hình thang cân có 2 góc kề 1 đáy bằng nhau.

Bài 3: Dùng ký hiệu \rightarrow để nối các ý đúng với nhau.

- a. Hình thang có 2 đường chéo bằng nhau là 1) Hình bình hành
b. Tứ giác có 2 cạnh đối song song và bằng nhau là 2) Hình chữ nhật
3) Hình thang cân

Bài 4: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD). Có $\hat{C} = 60^\circ$ và AB = AD. Số đo \widehat{DBC} là:

- a. 80° b. 90° c. 100° d. 120°

Bài 5: Tứ giác ABCD có $\hat{A} = 2\hat{B} = 2\hat{C} = 4\hat{D}$. Số đo góc A bằng:

- a. 40° b. 90° c. 120° d. 160°

Bài 6: Để tứ giác ABCD là hình thang cân ta cần có:

- a. AB // CD và góc A bằng góc B b. AB // CD và AB = CD
c. AB // CD và AD = BC d. Cả 3 câu a, b, c đều sai

Bài 7: Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng d. Khi d

- a. Vuông góc với đoạn AB b. Đi qua trung điểm của đoạn AB
c. Là đường trung trực của đoạn AB d. Cả a, b và c đều sai

Bài 8: Để một tứ giác là hình bình hành ta cần chứng minh:

- a. Tứ giác có hai cạnh đối bằng nhau
b. Tứ giác có hai góc đối bằng nhau
c. Tứ giác có một cặp cạnh đối song song và một cặp đối bằng nhau
d. Cả 3 câu a, b, c đều sai

Bài 9: Trong hình bình hành có tính chất sau:

- a. Hai đường chéo bằng nhau b. Hai góc đối bù nhau
c. Các cạnh đối bằng nhau d. Cả 3 câu trên đều sai

Bài 10: Trong các tính chất của hình bình hành, tính chất nào sai?

- a. Các góc đối bằng nhau
b. Các cạnh đối bằng nhau
c. Hai đường chéo bằng nhau
d. Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Bài 11: Trong các hình sau hình nào có trục đối xứng

- a. Hình thang cân b. Hình thang
c. Hình bình hành d. Hình thang vuông

Bài 12: Cho hình thang ABCD (AB // CD). Có $\hat{A} = 135^\circ$ thì số đo \hat{D} bằng

- a. 55° b. 45°
c. 35° d. Cả a, b và c đều sai.

Bài 13: Trong các hình được liệt kê sau, hình nào có trục đối xứng?

- a. Hình thoi. b. Đoạn thẳng
c. Hình chữ nhật d. Cả a, b, c đều đúng.

Bài 14: Câu phát biểu nào sau đây là đúng?

- a. Hình chữ nhật thì có một góc vuông.
b. Tứ giác có hai đường chéo vuông góc là hình thoi.
c. Hình bình hành thì có hai đường chéo bằng nhau.
d. Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

Bài 15: Đường chéo của hình vuông dài 2m. Cạnh của hình vuông đó là

- a. 1m b. $\sqrt{2}$ m c. $\frac{4}{3}$ m d. $\frac{3}{2}$ m.

Bài 16: Hình thoi ABCD có AC = 8cm; BD = 6cm. Cạnh của hình thoi có độ dài là:

- a. 5cm b. 9cm c. 10cm d. 12cm

Bài 17: Trong các hình được liệt kê sau; hình nào có tâm đối xứng.

- a. Hình thoi. b. Tam giác đều
c. Hình thang d. Cả a, b, c đều đúng.

Bài 18: Câu phát biểu nào sau đây là sai?

- a. Tứ giác có một góc vuông là hình chữ nhật.
b. Hình bình hành thì có hai đường chéo vuông góc là hình thoi.
c. Hình bình hành thì tâm đối xứng.
d. Hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác của một góc là hình vuông.

Bài 19: Cho hình thoi ABCD, đường chéo AC dài 4m, đường chéo BD dài 2m. Cạnh của hình thoi dài:

- a. $\sqrt{3}$ m b. $\sqrt{5}$ m c. 3 m d. $\frac{3}{2}$ m.

Bài 20: Hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^\circ$; cạnh của hình thoi dài 2m. Đường chéo BD dài:

- a. 2m b. $\sqrt{5}$ m c. 3m d. $\frac{3}{2}$ m

Bài 21: Tam giác ABC vuông tại A có BC = 5cm. Độ dài trung tuyến AM là:

- a. $\frac{5}{4}$ cm b. 5cm c. 10cm d. 2,5cm.

Bài 22: Hình nào sau đây không có tâm đối xứng?

- a. Hình vuông b. Hình thang cân
c. Hình bình hành d. Hình thoi

Bài 23: Tứ giác ABCD có $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} : \hat{D} = 1 : 2 : 3 : 4$. Số đo các góc của tứ giác là:

- a. $\hat{A} = 40^\circ; \hat{B} = 80^\circ; \hat{C} = 120^\circ; \hat{D} = 160^\circ$
b. $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$

c. $\hat{A} = 36^\circ; \hat{B} = 72^\circ; \hat{C} = 108^\circ; \hat{D} = 144^\circ$

d. $\hat{A} = 144^\circ; \hat{B} = 108^\circ; \hat{C} = 72^\circ; \hat{D} = 36^\circ$

Bài 24: Độ dài hai đường chéo của hình thoi là 24 cm và 32cm. Độ dài cạnh của hình thoi là:

- a. 40cm b. 20cm c. 28cm d. 30cm

Bài 25: Hình bình hành có bao nhiêu trục đối xứng?

- a. 0 trục b. 1 trục c. 2 trục d. 4 trục

Bài 26: Mệnh đề nào sau đây là sai:

- a. Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật
b. Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi
c. Hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông
d. Hình chữ nhật có một đường chéo là tia phân giác của một góc là hình vuông

Bài 27: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Có M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Biết AB = 7cm và CD = 11cm. Độ dài đoạn MN là:

- a. 4cm b. 9cm c. 12cm d. 18cm

Bài 28: Dấu hiệu nào sau đây không là dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật?

- a. Tứ giác có ba góc vuông.
b. Hình bình hành có một góc vuông
c. Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau
d. Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc.

Bài 29: Chọn đáp án đúng để điền vào chỗ trống: "Trong tam giác vuông, bằng nửa cạnh huyền"

- a. Đường trung tuyến ứng với cạnh huyền
b. Đường trung trực ứng với cạnh huyền
c. Đường cao ứng với cạnh huyền
d. Đường phân giác ứng với cạnh huyền

Bài 30: Chọn câu trả lời sai: Cho hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$)

có $\hat{B} = 120^\circ$ thì:

- a. $\hat{B} = 2\hat{C}$ b. $\hat{A} - \hat{C} = 30^\circ$
c. a, b đều sai d. a, b đều đúng

Bài 31: Tứ giác ABCD có AC \perp BD tại O. Để ABCD là hình thoi cần phải thêm điều kiện:

- a. AB = BC b. AB \parallel CD
c. O là trung điểm của AC và BD d. AC = BD.

Bài 32: Chọn câu đúng: Hình chữ nhật trở thành hình vuông nếu có:

- a. Hai đường chéo bằng nhau
b. Một đường chéo là phân giác của một góc
c. Bốn góc vuông
d. Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Bài 33: Chọn câu sai:

- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình thang cân và hình bình hành.
- Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.
- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình thoi.
- Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.

Bài 34: Chọn câu đúng:

- Đường trung tuyến trong tam giác bằng nửa cạnh huyền.
- Đường trung tuyến trong tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền.
- Đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền.
- Hai câu B, C đều đúng.

Bài 35: Chọn câu sai: Một tam giác là tam giác vuông nếu có:

- Tổng bình phương hai cạnh bằng bình phương cạnh thứ ba.
- Độ dài đường trung tuyến bằng nửa độ dài một cạnh.
- Tổng hai góc bằng 90° .
- Độ dài đường trung tuyến bằng nửa độ dài cạnh tương ứng.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM HỌC KÌ II

ĐẠI SỐ

Bài 1: Phương trình $x(x + 2) = 0$ có tập hợp nghiệm là:

- $S = \{0\}$
- $S = \{2\}$
- $S = \{0; 2\}$
- $S = \{0; -2\}$

Bài 2: Giá trị $x = 2$ là nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau đây:

- $x^2 + 2 = 0$
- $x^2 - 2 = 0$
- $x - 2 = 0$
- $x + 2 = 0$

Bài 3: Phương trình $\frac{x}{x+3} - \frac{5}{2x-4} = 0$ có điều kiện xác định là:

- $x \neq -3; x \neq 2$
- $x \neq -2; x \neq 3$
- $x \neq -3; x \neq -1; x \neq -2$
- $x \neq -3; x \neq 2; x \neq -2$

Bài 4: Phương trình $5x = 0$ có nghiệm là:

- $x = 5$
- $x = 0$
- $x = -5$
- $x = 1/5$

Bài 5: Điều kiện xác định của phương trình: $\frac{3}{x+3} - \frac{4}{x-2} = 0$ là:

- $\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq -2 \end{cases}$

Bài 6: Tập nghiệm của phương trình $(x - 2)(x^2 + 9) = 0$ là:

- $S = \{2\}$
- $S = \{-9; 2\}$
- $S = \{9; 2\}$
- $S = \{0; 2\}$

a. Một nghiệm b. Hai nghiệm c. Vô nghiệm d. Vô số nghiệm

Bài 8: Điều kiện xác định của phương trình $\frac{5}{x-5} = \frac{7}{x(x-5)}$ là:

- $x \neq 0$
- $x \neq 5$
- $x \neq 0$ và $x \neq 5$
- $x \neq -5$

Bài 9: Cho biết $a < b$ thì bất đẳng thức nào sau đây là sai:

- $\frac{2}{3}a < \frac{2}{3}b$
- $a - b < 0$
- $-5a > -5b$
- $-\frac{2}{3}a < -\frac{2}{3}b$

Bài 10: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất 1 ẩn:

- $\frac{3}{x} + 5 = 0$
- $4x - 6 = 0$
- $x^2 - 9 = 0$
- $0x - 2 = 0$

Bài 11: Số nghiệm của phương trình $(x + 1)(x^2 + 4) = 0$ là:

- 1
- 2
- 3
- 4

Bài 12: Phương trình $x - 1 = 0$ tương đương với phương trình sau:

- $x + 2 = -3$
- $x(x - 1) = 0$
- $4x + 5 = 0$
- $x^2 - 1 = 0$

Bài 13: Phương trình $\frac{x}{x-1} + \frac{4-x}{x+2} = 0$ có điều kiện xác định là:

- $x \neq 1$
- $x \neq -2$
- $x \neq 1; x \neq -2$
- $x \neq -1; x \neq 2$

Bài 14: Giá trị của m để phương trình $4x + m = 0$ có nghiệm $x = -2$ là:

- 8
- 6
- 6
- 8

Bài 15: Phương trình $(3x + 2)(x - 1) = 0$ có tập hợp nghiệm là:

- $S = \emptyset$
- $S = \left\{\frac{2}{3}; 1\right\}$
- $S = \left\{-\frac{2}{3}; -1\right\}$
- $S = \left\{-\frac{2}{3}; 1\right\}$

Bài 16: Xét xem $x = -1$ là nghiệm của phương trình nào dưới đây:

- $2x + 1 = -x + 2$
- $x(x - 1) = 0$
- $x + 5 = 2(x - 1)$
- $3x + 5 = 0$

Bài 17: Phương trình $ax + b = 0$ (với $a \neq 0$) là phương trình:

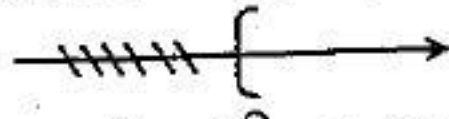
- Luôn có một nghiệm.
- Luôn có hai nghiệm.
- Không có nghiệm.
- Chưa thể xác định được số nghiệm.

Bài 18: Phương trình $2x = 0$ là phương trình:

- Có một nghiệm
- Có tập nghiệm là: $\{2\}$
- Có tập nghiệm là: $\{-2\}$
- Có tập nghiệm là: \emptyset

Bài 19: Tập nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ là:

a. $\{1; -1\}$ b. \emptyset c. $\{-1\}$ d. $\{0\}$
Bài 20: Hình vẽ sau là biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình:



a. $x < -2$ b. $x > -2$ c. $x \leq -2$ d. $x \geq -2$

Bài 21: Điều kiện xác định của phương trình:

$$\frac{1}{x-4} - \frac{2+x}{(x-1)(x-4)} = 0 \text{ là:}$$

a. $\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq 1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Bài 22: Tập nghiệm của phương trình: $(x^2 + 9)(x - 1) = 0$ là:

a. $S = \{1; 3; -3\}$ b. $S = \{1; -9\}$
 c. $S = \{1\}$ d. $S = \{-1; -9\}$

Bài 23: Tính $(3x - 2)(3x + 2)$ được kết quả là:

a. $9x^2 - 4$ b. $9x^2 + 4$
 c. $9x^2 - 12x + 4$ d. $9x^2 + 12x + 4$

Bài 24: Đẳng thức nào sau đây sai:

a. $(x + 1)(1 - x) = 1 - x^2$ b. $-x^2 + 6x - 9 = -(x - 3)^2$
 c. $(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$ d. $-(x - 5)^2 = (-x + 5)^2$

Bài 25: Thương của phép chia đa thức $25a^4b^2 - 10a^3b^3$ cho đơn thức $5a^3b^2$ là:

a. $5a - 2b^2$ b. $5 + 2b$ c. $5a - b$ d. $5a - 2b$

Bài 26: Trong các phương trình sau, phương trình nào nghiệm đúng với mọi x:

a. $x + 2 = 2$ b. $0x + 7 = 1$
 c. $|x - 2| = 0$ d. $3(x - 1) - 2x = x - 3$

Bài 27: Trong các phương trình sau, phương trình nào có tập nghiệm là $S = \{0; 1\}$:

a. $(x + 2)(x - 3) = 7$ b. $\frac{x(x-1)}{x+2} = 0$
 c. $(3x - 2)(x + 5) = 0$ d. $\frac{7x}{(x-2)(x+3)} = 0$

Bài 28: Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào không là bất phương trình một ẩn:

a. $0x + 7 \geq 0$ b. $(x - 1)(x + 2) \leq 0$
 c. $3 - x \geq 0$ d. $x^2 + 2 \leq 0$

Bài 29: Cho $m + 1 > n + 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai:

a. $m > n$ b. $m - 3 > n - 3$ c. $m < n$ d. $m + 5 > n + 5$

Bài 30: Phương trình: $7x - 9 = 5x + 7$ có nghiệm là:

a. $x = 8$ b. $x = 1$ c. $x = 2$ d. Kết quả khác.

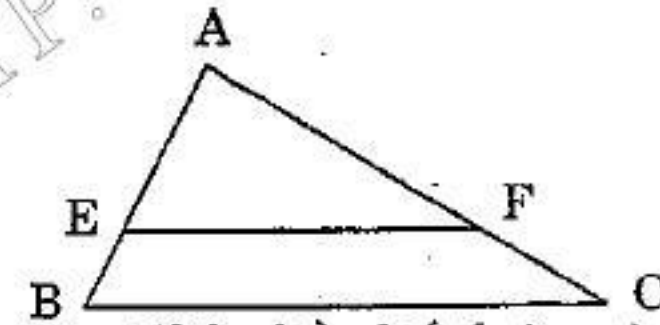
Bài 31: Điều kiện xác định của phương trình: $\frac{2}{x^2 - 3x} = \frac{7x + 2}{x}$ là:

a. $x \neq 0$ và $x \neq 3$ b. $x \neq 0$
 c. $x \neq 3$ d. $x \neq 0$ và $x \neq -3$

HÌNH HỌC

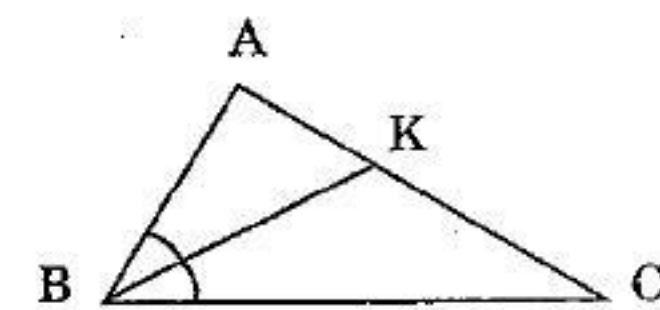
Bài 1: Cho hình vẽ: $EF \parallel BC$. Áp dụng hệ quả định lý Talet ta có:

a. $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{EB}$ b. $\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{FC}$
 c. $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AF}$ d. $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}$



Bài 2: Cho hình vẽ BK là tia phân giác góc ABC, điều kết luận nào sau đây là đúng:

a. $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{BC}$ b. $\frac{KC}{KA} = \frac{BC}{AB}$
 c. $\frac{BK}{AK} = \frac{AB}{BC}$ d. $\frac{AB}{BC} = \frac{KC}{AC}$



Bài 3: Tam giác ABC và tam giác EFG có: $\frac{AB}{EG} = \frac{BC}{GF} = \frac{CA}{EF}$. Kết luận

nào sau đây là đúng:

a. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EFG
 b. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EGF
 c. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác GFE
 d. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác FGE.

Bài 4: Cho tam giác ABC. Một đường thẳng d song song với BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Hãy chọn câu đúng:

a. $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{MB}$ b. $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$ c. $\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{AN}$ d. $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{MB}$

Bài 5: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 40^\circ$; $\hat{B} = 80^\circ$ và tam giác DEF có $\hat{E} = 40^\circ$; $\hat{D} = 60^\circ$. Chọn câu đúng:

a. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ b. $\triangle FED \sim \triangle CBA$
 c. $\triangle ACB \sim \triangle EFD$ d. $\triangle DFE \sim \triangle CBA$

Bài 6: Cho tam giác ABC, $D \in AB$; $E \in AC$ sao cho $DE \parallel BC$. Áp dụng định lý Talet vào $\triangle ABC$ ta có tỉ lệ thức sau:

a. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ b. $\frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AC}$ c. $\frac{AD}{AB} = \frac{BC}{DE}$ d. Cả a, b và c đều sai

Bài 7: Cho tam giác ABC, D ∈ AB; E ∈ AC sao cho DE // BC. Biết

$$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3} \text{ và } AC = 10\text{cm. Tính AE và EC}$$

- a. AE = 2cm; EC = 8cm
b. AE = 6cm; EC = 4cm
c. AE = 4cm; EC = 6cm
d. Cả a, b và c đều sai

Bài 8: Cho tam giác ABC có AD là phân giác, tính tỉ số $\frac{DB}{DC}$ biết

$$AB = 4\text{cm}; AC = 8\text{cm}; BC = 10\text{cm.}$$

- a. $\frac{DB}{DC} = \frac{5}{4}$ b. $\frac{DB}{DC} = 2$ c. $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$ d. Cả a, b và c đều sai.

Bài 9: Cho tam giác ABC có AB = 2cm, AC = 4cm, BC = 8cm và tam giác DEF có EF = 6cm, DF = 12cm, DE = 3cm. Ta có thể kết luận:

- a. ΔABC đồng dạng với ΔDEF (đúng đỉnh tương ứng)
b. ΔABC đồng dạng với ΔDFE (đúng đỉnh tương ứng)
c. ΔABC đồng dạng với ΔFDE (đúng đỉnh tương ứng)
d. Cả a, b và c đều sai.

Bài 10: Cho tam giác ABC và tam giác DEF có $\frac{BA}{DE} = \frac{BC}{DF}$. Để hai tam

giác này đồng dạng theo trường hợp cạnh-góc-cạnh thì ta cần có thêm điều kiện gì?

- a. Góc A bằng góc E
b. Góc B bằng góc D
c. Góc C bằng góc F
d. Cả a, b và c đều sai

Bài 11: Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác MNP (đã viết đúng đỉnh tương ứng). Biết $\hat{A} = 100^\circ$ và $\hat{N} = 20^\circ$. Tính góc C?

- a. $\hat{C} = 20^\circ$
b. $\hat{C} = 100^\circ$
c. $\hat{C} = 60^\circ$
d. Cả a, b và c đều sai.

Bài 12: Cho biết $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$ và CD = 8cm. Độ dài AB là:

- a. 40cm
b. $\frac{40}{3}$ cm
c. 3,6cm
d. 4,8cm

Bài 13: Cho tam giác ABC, M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC sao cho MN // BC và AM = 2 MB. Tỉ số $\frac{MN}{BC}$ là:

- a. 2
b. $\frac{3}{2}$
c. 3
d. $\frac{2}{3}$

Bài 14: Cho tam giác ABC có AB = 5cm, AC = 6cm, BC = 7cm, phân giác AD. Độ dài BD là:

- a. $\frac{35}{11}$ cm
b. 35cm
c. 11cm
d. $\frac{42}{11}$ cm

Bài 15: Nếu tam giác ABC đồng dạng với tam giác A'B'C' theo tỉ số $\frac{1}{3}$,

tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác A''B''C'' theo tỉ số $\frac{1}{2}$ thì tam giác ABC đồng dạng với tam giác A''B''C'' theo tỉ số.

- a. $\frac{3}{2}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{1}{6}$ d. 6

Bài 16: Cho biết $\frac{AB}{EF} = \frac{3}{4}$ và AB = 12dm. Độ dài EF là:

- a. 16cm b. 9dm c. 16dm d. 9cm

Bài 17: Cho tam giác ABC có D ∈ AB, E ∈ AC. Nếu DE // BC thì:

- a. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ b. $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$
c. $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$ d. Cả a, b và c đúng.

Bài 18: Tứ giác đều là:

- a. Hình chữ nhật b. Hình vuông
c. Hình thoi d. Cả a, b và c đều đúng.

Bài 19: Cho tam giác ABC và tam giác HIK có $\hat{A} = \hat{H}$ và $\hat{C} = \hat{I}$ thì:

- a. Tam giác ABC đồng dạng tam giác HKI
b. Tam giác ACB đồng dạng tam giác HIK
c. Tam giác BCA đồng dạng tam giác HIK
d. Tất cả a, b và c đều đúng

Bài 20: Cho tam giác EFA. Một đường thẳng d song song với EF cắt các cạnh AE và AF lần lượt tại M và N. Tỉ lệ thức nào sau đây là đúng:

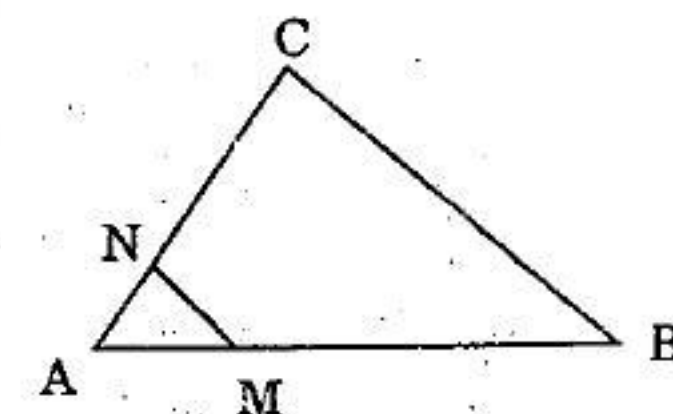
- a. $\frac{AM}{AE} = \frac{AN}{AF}$ b. $\frac{MN}{EF} = \frac{AN}{AF}$ c. $\frac{MN}{EF} = \frac{AM}{ME}$ d. a và b đúng

Bài 21: Hai đoạn thẳng AB và CD tỉ lệ với 4 và 3 thì:

- a. $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$ b. AB + CD = 7
c. $\frac{AB}{4} = \frac{CD}{3}$ d. AB = 4 và CD = 3

Bài 22: Trong hình vẽ cho MN // CB thì:

- a. $\hat{B} = \hat{A}$ b. $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{NC}$
c. $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$ d. $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$



Bài 23: Tam giác ABC đồng dạng với tam giác B'A'C' thì:

- a. $\hat{A} = \hat{A}'$ b. $\hat{C} = \hat{B}'$ c. $\hat{A} = \hat{C}'$ d. $\hat{B} = \hat{A}'$

Bài 24: Chọn ra câu đúng:

- a. Hai tam giác đồng dạng thì bằng nhau.
b. Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng.
c. Hai tam giác cân thì đồng dạng.
d. Bất kì hai tam giác vuông nào cũng là hai tam giác đồng dạng nhau.

Bài 25: Cho tam giác ABC. Một đường thẳng d song song với BC cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại I và K. Tỷ lệ thức nào sau đây là đúng:

- a. $\frac{IK}{BC} = \frac{AK}{AC}$ b. $\frac{IK}{BC} = \frac{AI}{IB}$ c. $\frac{AK}{AC} = \frac{AI}{IB}$ d. $\frac{AB}{IB} = \frac{AC}{AK}$

Bài 26: Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF, $\frac{AB}{DE} = 2$ và

- diện tích tam giác DEF = 18cm^2 thì diện tích tam giác ABC bằng:
- a. 18cm^2 b. 36cm^2 c. 54cm^2 d. 72cm^2

Bài 27: Một hình hộp chữ nhật có 3 kích thước là 5cm, 8cm, 7cm. Thể tích hình hộp chữ nhật là:

- a. 20cm^3 b. 47cm^3 c. 140cm^3 d. 280cm^3

Bài 28: Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau thì hình đó là:

- a. Hình chữ nhật b. Hình thoi
c. Hình thang cân d. Hình vuông.

Bài 29: Hình thoi cần có thêm điều kiện gì sau đây để nó là hình vuông?

- a. Có một góc vuông b. Có hai cạnh kề bằng nhau
c. Có hai đường chéo vuông góc d. Có các cạnh đối bằng nhau.

Bài 30: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Có M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Biết $AB = 9\text{cm}$ và $CD = 15\text{cm}$. Độ dài đoạn MN là:

- a. 4,5cm b. 7,5cm c. 12cm d. 18cm

Bài 31: Cho tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{3}{5}$, hiệu chu vi của hai tam giác là 10dm. Chu vi của tam giác A'B'C' là:

- a. 15dm b. 20dm c. 25dm d. 30dm.

Bài 32: Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác A'B'C' theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$. Gọi AM, A'M' thứ tự là trung tuyến của tam giác A'B'C'. Biết A'M' = 15cm thì độ dài của AM là:

- a. 6cm b. 10cm c. 12cm d. 22,5cm

Bài 33: Hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có số cặp mặt phẳng song song là:

- a. 2 b. 3 c. 4 d. 6

Bài 34: Hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = 3\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $AA' = 6\text{cm}$. Thể tích hình hộp chữ nhật này là:

- a. 84cm^3 b. 60cm^3 c. 72cm^3 d. 42cm^3

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU.....3

PHẦN A – ĐẠI SỐ

Bài 1. ĐƠN THỨC – ĐA THỨC – HÀNG ĐẲNG THỨC.....5

Bài 2. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ.....15

Bài 3. PHÂN TÍCH ĐA THỨC RA NHÂN TỬ.....24

Bài 4. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ.....30

Bài 5. PHƯƠNG TRÌNH.....36

Bài 6. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH.....39

Bài 7. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO.....44

Bài 8. PHƯƠNG TRÌNH PHÂN THỨC KHÔNG MẪU MỰC.....47

Bài 9. CÁC BÀI TOÁN CÓ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI.....50

Bài 10. BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ (PHẦN NÂNG CAO).....73

Bài 11. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH.....114

PHẦN B – HÌNH HỌC

Bài 1. HÌNH THANG.....120

Bài 2. HÌNH BÌNH HÀNH.....131

Bài 3. HÌNH CHỮ NHẬT.....138

Bài 4. HÌNH THOI.....144

Bài 5. HÌNH VUÔNG.....152

Bài 6. ĐỊNH LÝ THALES.....163

Bài 7. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG.....184

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM HỌC KÌ I.....203

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM HỌC KÌ II.....210

KẾT QUẢ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.....218

MỤC LỤC.....219

HỌC KÌ I				HỌC KÌ II			
ĐẠI SỐ		HÌNH HỌC		ĐẠI SỐ		HÌNH HỌC	
1	c	1	b (Đ) a,c,d (S)	1	d	1	d
2	a	2	d	2	c	2	b
3	b	3	a 3, b 1	3	a	3	b
4	d	4	b	4	b	4	b
5	d	5	d	5	b	5	d
6	b	6	a	6	a	6	a
7	d	7	c	7	c	7	c
8	a	8	d	8	c	8	c
9	d	9	c	9		9	d
10	d	10	c	10	b	10	b
11	c	11	a	11	a	11	c
12	d	12	b	12	c	12	d
13	c	13	c	13	c	13	d
14	d	14	d	14	a	14	a
15	b	15	b	15	d	15	c
16	b	16	a	16	d	16	c
17	c	17	a	17	a	17	d
18	c	18	a	18	a	18	b
19	a	19	b	19	a	19	d
20	a	20	a	20	d	20	d
21	c	21	d	21	a	21	c
22	c	22	b	22	c	22	c
23	a	23	c	23	a	23	d
24	b	24	b	24	d	24	b
25	a	25	a	25	d	25	a
26	c	26	c	26	d	26	d
27	c	27	b	27	b	27	d
28	c	28	d	28	a	28	b
29	b	29	a	29	c	29	a
30	a	30	d	30	a	30	c
31	b	31	c	31	a	31	a
32	d	32	b			32	b
33	b	33	c			33	b
34	d	34	c			34	c
35	c	35	b				
36	b						

BDKT TOÁN - LÝ - HÓA CẤP 2+3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN